

Formula di Taylor con resto di Peano:

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile n -volte in $x_0 \in (a, b)$ e $(n-1)$ -volte in (a, b) . Allora $\forall x \in (a, b)$ si ha per $x \rightarrow x_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = P_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n).$$

Regole degli o :

- i) $k \cdot o(x^\alpha) = o(x^\alpha) \quad \forall k \in \mathbb{R}$,
- ii) $x^\beta \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$,
- iii) $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$,
- iv) $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^{\min(\alpha, \beta)})$,
- v) $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$.

Polinomi di Taylor in $x_0 = 0$: per $x \rightarrow 0$

- i) $f(x) = e^x \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$,
- ii) $f(x) = \cos x \Rightarrow P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$,
- iii) $f(x) = \log(1+x) \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$,
- iv) $f(x) = \sin x \Rightarrow P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
- v) $f(x) = \tan x \Rightarrow P_{6,0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5$,
- vi) $f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Formula di Taylor con resto di Lagrange:

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile $(n+1)$ -volte in (a, b) , sia $x_0 \in (a, b)$.

Allora $\forall x \in (a, b) \exists \xi_x$ tra x_0 e x :

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{\text{errore di interpolazione}}$$

errore di interpolazione $\Rightarrow E_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$.

Esercitazione Fisici 17/09/23

Esercizio 1:

Scrivere il polinomio di Taylor (con resto di Peano) di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ di

$$f(x) = \log(1 + \arctan x) - \sin(\tan x).$$

Svolgimento:

Ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$.

Prendendo $t = \arctan x$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo

$$\log(1 + \arctan x) = \arctan x - \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{\arctan^3 x}{3} + o(\arctan^3 x).$$

Ricordiamo che $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, allora

$$\begin{aligned} \log(1 + \arctan x) &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \\ &\quad + o \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \underline{o(x^3)} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \cancel{o(x^4)} + \frac{1}{3} x^3 \\ &= x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^3). \end{aligned}$$

Annotations in pink:
- Above the x^2 term: $x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$
- Above the x^3 term: $(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4))(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))$

Analogamente ricordiamo

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{e} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \sin(\tan x) &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 + o \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^3 \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6} x^3 = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Annotation in pink:
- Above the x^3 term: $3x^2 \cdot \frac{x^3}{3} = 3x \cdot \frac{x^6}{9} \Rightarrow \text{NO!}$

Infine

$$\begin{aligned} f(x) = \log(1 + \arctan x) - \sin(\tan x) &= \cancel{x} - \frac{1}{2} x^2 + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

Esercizio 2:

Scrivere il polinomio di Taylor (con resto di Peano) di ordine 3 centrato in $x_0 = 2$ di $f(x) = \log(x)$.

Sviluppo:

Nel nostro caso $f(x)$ è derivabile infinite volte in un intorno di 2:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = +2 \frac{1}{x^3} \text{ etc.}$$

$$P_{3,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_{3,2}(x) &= \log 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 \\ &= \log 2 + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \log 2 - \frac{11}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che

$$f(x) = \log 2 - \frac{11}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + O((x-2)^3).$$

Metodo alternativo:

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, prendiamo $t = \frac{x}{2} - 1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 2$:

$$\log(1+t) = \log(1 + \frac{x}{2} - 1) = \log(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} - 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(\frac{x}{2} - 1)^3 + O(\frac{x}{2} - 1)^3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log(x) &= \log(2) + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + O((x-2)^3) \\ &= \log(2) - \frac{11}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + O((x-2)^3). \end{aligned}$$

Esercizio 3:

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Svolgimento:

Ricordiamo $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) \text{ per } x \rightarrow 0.$$

Ricordiamo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$\Rightarrow (e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \underline{o(x^4)} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{2} + \cancel{\frac{x^6}{3}} + o(\cancel{x^6}) - \cancel{x^2} - x^3 - \frac{7x^4}{12} + \underline{o(x^4)} + x^\alpha}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{13}{12}x^4 - x^3 + x^\alpha + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 3, \\ -\frac{13}{12} & \alpha = 3, \\ -\infty & \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 4:

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arctan x)^2 - \log(1+x^2)}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) \text{ (da Es. 3) per } x \rightarrow 0,$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow (\arctan x)^2 = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \dots + \underline{o(x^4)} \text{ per } x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\arctan x)^2 - \log(1+x^2)}{x^\alpha} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x^2} - \frac{2}{3}x^4 + \underline{o(x^4)} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} - \cancel{\frac{x^6}{3}} + o(\cancel{x^6})}{x^\alpha} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 4, \\ -\frac{1}{6} & \alpha = 4, \\ -\infty & \alpha > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5:

Provare che $\sin \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Svolgimento:

Per il teorema di Taylor con il resto di Lagrange

$$\sin(x) = P_{3,0}(x) + \frac{\sin(\zeta) x^4}{4!} \quad \text{con } \zeta \in (0, x), x > 0.$$

$$\text{Ovvero } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\zeta) x^4}{4!} \quad \text{con } \zeta \in (0, x).$$

In particolare per $x = \frac{1}{n}$ otteniamo

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\sin(\zeta)}{24n^4} \quad \text{con } \zeta \in (0, \frac{1}{n}).$$

Notiamo che $0 < \zeta < \frac{1}{n} < 1$, quindi $\sin(\zeta) \in (0, 1) \Rightarrow \frac{\sin(\zeta)}{24n^4} > 0$.

Di conseguenza abbiamo $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} > \frac{1}{n+1}$. Se verificiamo l'ultima disuguaglianza abbiamo concluso l'esercizio, ovviamente dobbiamo dimostrare $\star \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Verifichiamo $\star$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$?

$$\frac{6n^2 - 1}{6n^3} > \frac{1}{n+1}$$

$$(6n^2 - 1)(n+1) > 6n^3 \Rightarrow \cancel{6n^3} + 6n^2 - n - 1 > \cancel{6n^3}$$

$$\Rightarrow 6n^2 - n - 1 > 0.$$

RisolviAMO l'equazione associata e otteniamo

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{1}{2} \\ \searrow x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza $\star$ è verificata per $x < -\frac{1}{3}$ o $x > \frac{1}{2}$. Avendo

come condizione $n > 0$, $\star$ è verificata $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Esercizio 6:

Calcolare $\sqrt{e}$ con la precisione di 4 cifre decimali.

Svolgimento:

Usiamo lo sviluppo di Taylor di $f(x) = e^x$ in $x=0$:

$$P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{e} \quad f^{(n+1)}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi otteniamo

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{con } c \in (0, x).$$

Prendendo $x = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{e} = e^{1/2} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k k!}}_{\text{stima}} + \underbrace{\frac{e^c}{2^{n+1} (n+1)!}}_{\text{errore}} \quad \text{con } c \in (0, \frac{1}{2}).$$

Lavoriamo sull'errore:

$$\frac{e^c}{2^{n+1} (n+1)!} < \frac{e^{1/2}}{2^{n+1} (n+1)!} < \frac{3^{1/2}}{2^{n+1} (n+1)!} < \frac{2}{2^{n+1} (n+1)!} = \frac{1}{2^n (n+1)!} < 10^{-5}$$

vogliamo fino alla 4^a cifra decimale!
↓

$$\Rightarrow 2^n (n+1)! > 10^5 \Rightarrow$$

n	$2^n (n+1)!$	$> 10^5$
1	4	x
2	24	x
3	192	x
4	1920	x
5	23040	x
6	322560	✓

$$\Rightarrow \underline{n=6!}$$

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2^k k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} + \frac{1}{46080}$$

con precisione fino a 10^{-4} !!

$$= 1 + \frac{29893}{46080} = 1,648719618\dots$$

precisione ?? possibili errori!
fino a 10^{-4}

Esercizio 7:

Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ converge e in tal caso calcolarne la somma.

Svolgimento:

Osserviamo che si tratta di una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{2+\alpha}{1-\alpha}.$$

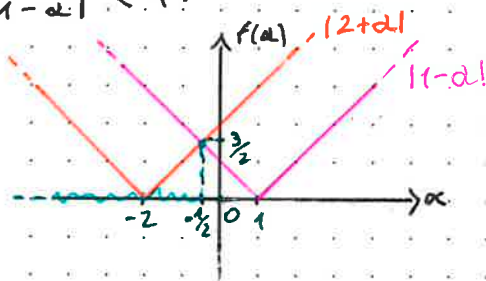
Sappiamo quindi che $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$

- **CONVERGE** per $|q| < 1 \Rightarrow \left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right| < 1$:

$$\left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right| < 1 \Rightarrow |2+\alpha| < |1-\alpha|$$

$$\Rightarrow 2+\alpha = 1-\alpha \Rightarrow 2\alpha = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}.$$



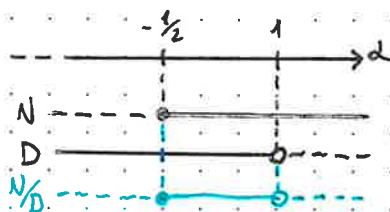
converge se $\alpha < -\frac{1}{2}$ e converge a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2+\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha-2-\alpha} = \frac{1-\alpha}{-1-2\alpha} = \frac{\alpha-1}{2\alpha+1}.$$

- **DIVERGE** per $q \geq 1 \Rightarrow \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \geq 1$:

$$\frac{2+\alpha}{1-\alpha} \geq 1 \Rightarrow \frac{2+\alpha-1+\alpha}{1-\alpha} \geq 0 \Rightarrow \frac{1+2\alpha}{1-\alpha} \geq 0$$

$$\Rightarrow \underline{-\frac{1}{2} \leq \alpha < 1}.$$



- e' **INDETERMINATA** per $q \leq -1 \Rightarrow \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \leq -1$:

$$\frac{2+\alpha}{1-\alpha} \leq -1 \Rightarrow \frac{2+\alpha+1-\alpha}{1-\alpha} \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{1-\alpha} \leq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha > 1}.$$

Esercizio 8:

Studiare il carattere delle seguenti serie e, quando possibile, calcolare il loro valore:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$,

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Svolgimento:

a) segno di a_n : $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \Rightarrow$ la serie è a termini positivi!

Osservazione: $a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$ serie telescopica!

Somme parziali:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{N!}} - \frac{1}{(N+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

Quindi otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)!} \right) = 1.$$

⚠ Nel caso a) la serie è convergente a 1.

b) segno di a_n : $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \Rightarrow$ la serie è a termini positivi!

Osservazione: $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(A+B) + 2A}{n(n+1)(n+2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0, \\ 2A=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{2}, \\ A=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Anche in questo caso ci conduciamo a delle serie telescopiche!

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

↑
serie telescopica di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}$$

← serie telescopica di Mergeli.

Quindi otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

⚠ Nel caso 6) la serie è convergente a $\frac{1}{4}$.

Studio delle serie: $\sum a_n$

- ① Carattere della serie,
- ② Somma della serie (se possibile).

① Carattere della serie:

(0) Riconoscere serie particolari (geometrica, telescopica, etc...);

(1) Verificare la condizione necessaria $\xrightarrow{\text{NO}}$ **NON CONVERGE**

$\swarrow$
($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$)

- (2) $\rightarrow$ **$a_n \geq 0$ (≤ 0)** $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{teorema del confronto;} \\ \rightarrow \text{ **$a_n > 0$ (< 0)** teorema del confronto asintotico;} \\ \rightarrow \text{ **$a_n > 0$ (< 0)** criterio del rapporto;} \\ \rightarrow \text{criterio della radice.} \end{array} \right.$
- $\rightarrow$ **$a_n \in \mathbb{R}$** $\rightarrow$ segni alterni $\rightarrow$ criterio di Leibniz;
 $\rightarrow$ **convergenza assoluta.**

② Somma della serie (se possibile):

- (1) Serie geometrica (o riconducibili);
- (2) Serie telescopica (o riconducibili);
- (3) Sviluppi di Taylor;
- (4) Casi particolari.