

# Esercitazione Fisic 24/11/23:

## Esercizio 1:

Determinare il carattere delle seguenti serie:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\sin n}{n} \right)^2$

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sin(n)}{n} \right)^2 = 0$ . ✓

•  $0 < \left( \frac{\sin n}{n} \right)^2 = \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_n = \left( \frac{\sin^2 n}{n^2} \right) \leq \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

Poiché  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, per il teorema del confronto la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\sin n}{n} \right)^2$  converge.

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ . ✓

•  $\frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n^2}$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Poiché  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  <sup>Maingoli</sup> converge, per il teorema del confronto asintotico la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$  converge.

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n}$

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ . ✓

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2}$ . <sup><1</sup> Quindi per il criterio ella radice la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n}$  converge.

d)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ . ✓

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ . <sup><1</sup> Quindi per il criterio del rapporto la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$  converge.

## Esercizio 2:

Determinare il carattere delle seguenti serie:

a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1} = 0$ . ✓

• Cosa è  $\cos(n\pi)$ ?  $\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$

Quindi  $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$  e  $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$  è a segni alterni.

Criterio di Leibniz:  $b_n = \frac{1}{n-1}$  e  $a_n = (-1)^n b_n$

a)  $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , ✓

b)  $b_{n+1} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} = b_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \searrow$ , ✓

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ . ✓

Per il criterio di Leibniz la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$  converge.

• E' assolutamente convergente?

$|a_n| = \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$ , poiché  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge per il teorema

del confronto asintotico  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)}{n-1} \right|$  diverge e quindi  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n-1}$  non è assolutamente convergente.

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2}$  ← segni alterni dato da  $\cos n \in [-1, 1]$ .

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2} = 0$  (poiché  $-3 \leq 2\cos n - 1 \leq 1$ ). ✓

• Osservo che  $-\frac{3}{n(n+1)^2} \leq \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)^2} \Rightarrow |a_n| \leq \frac{3}{n(n+1)^2}$ .

Poiché  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{n(n+1)^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  converge, per il teorema

del confronto  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2}$  è assolutamente

convergente  $\Rightarrow$  per il teorema della convergenza assoluta

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cos n - 1}{n(n+1)^2}$  è semplicemente convergente.



### Esercizio 3:

Al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , studiare il carattere delle seguenti serie:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \leftarrow a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . ✓
- Osserviamo che

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{1}{n} & \alpha < 2, \\ \frac{1}{2n} & \alpha = 2, \\ \frac{1}{n^{\alpha-1}} & \alpha > 2, \end{cases} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Caso  $\alpha < 2$  (analogo  $\alpha = 2$ ):

$$\frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge, per il teorema del confronto asintotico } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \text{ diverge } \forall \alpha \leq 2.$$

Caso  $\alpha > 2$ :

$$\frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \sim \frac{n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \text{ converge per } \alpha-1 > 1, \text{ per il teorema del confronto asintotico } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+n^\alpha} \text{ converge } \forall \alpha > 2.$$

b)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n + 1}, \quad \alpha > 0 \leftarrow a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

- Condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n + 1} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \alpha = 1, \\ 0 & \alpha > 1. \end{cases}$

Quindi la serie non converge per  $0 < \alpha \leq 1$ , inoltre dato che  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$  la serie diverge per  $0 < \alpha \leq 1$ . ✓

- Studiamo la serie per  $\alpha > 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{\alpha^{n+1} + 1} \cdot \frac{\alpha^n + 1}{(n)^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{\alpha^n + 1}{\alpha^{n+1} + 1} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n + 1}$  converge  $\forall \alpha > 1$ .

**NOTA:** ovviamente  $\frac{1}{\alpha} < 1$  nel criterio del rapporto perché sapevamo a priori (dalla condizione necessaria) che  $\alpha > 1$ .

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n + 3n} \quad \alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

NOTA: questa serie può essere considerata:

i) serie numerica con parametro;

ii) serie riconducibile alla serie di potenze.

i) • condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n + 3n} = \begin{cases} +\infty & |\alpha| \geq \sqrt{3}, \\ 0 & |\alpha| < \sqrt{3}. \end{cases}$

Quindi la serie non converge per  $|\alpha| \geq \sqrt{3}$ , inoltre dato che  $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$  la serie diverge per  $|\alpha| \geq \sqrt{3}$ .

• Osserviamo che  $3^n + 3n \sim 3^n$  per  $n \rightarrow +\infty$ , quindi  $a_n \sim \left(\frac{\alpha^2}{3}\right)^n$ .  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^2}{3}\right)^n$  converge se e solo se  $\alpha^2 < 3$ , cioè se e solo se  $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$  ( $|\alpha| < \sqrt{3}$ ), quindi per il teorema del confronto asintotico  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n + 3n}$  converge  $\forall \alpha \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .   
 ← come da C.U.

ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 3n} (\alpha^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ .  
 $b_n = \frac{1}{3^n + 3n}$   $x = \alpha^2$   $x_0 = 0$

Determinazione del raggio di convergenza:

i)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = l$  o ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = l \Rightarrow r = \begin{cases} +\infty & l=0, \\ 0 & l=+\infty, \\ \frac{1}{l} & l \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$

Nel nostro caso  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 3n}} = \frac{1}{3} = l \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow r = 3$ .

Di conseguenza la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^{2n}}{3^n + 3n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$

• converge per  $-3 < x < 3 \Leftrightarrow -3 < \alpha^2 < 3 \Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$ ;

• diverge per  $|\alpha| > \sqrt{3}$ ;

• per  $\alpha = \pm \sqrt{3}$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 3n} = 1 \neq 0 \Rightarrow$  non converge, ma essendo una serie a termini positivi ( $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ ) possiamo proprio dire che diverge.



#### Esercizio 4:

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze o delle seguenti serie riconducibili ad esse:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \quad (x_0 = 0).$   
 $a_n \sim$  segni alterni!

Raggio di convergenza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot n$$

$$\Rightarrow l = 1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow r = \frac{1}{l} = 1.$$

Quindi la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

- converge (assolutamente)  $\forall x \in (-1, 1)$ ;
- non converge (non sappiamo se diverge o causa dei segni alterni)  $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ;
- per  $x=1$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  converge per Leibniz (non converge assolutamente, solo semplicemente);
- per  $x=-1$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge.

Conclusioni:

La serie  $\begin{cases} \text{converge} \begin{cases} \text{assolutamente} & \forall x \in (-1, 1), \\ \text{semplicemente} & \forall x \in (-1, 1], \end{cases} \\ \text{non converge} & \forall x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty), \text{ in particolare} \\ \text{diverge} & \text{per } x = -1. \end{cases}$

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(x+1)^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^\alpha} (x+1)^n \Rightarrow a_n = \frac{4}{n^\alpha}, x_0 = -1, \alpha \in \mathbb{R}.$   
 $\uparrow$  termini positivi.

Raggio di convergenza:

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{l} = 1.$$

NOTA: in questo caso la convergenza si avrà nell'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , non in  $(-r, r)$ .

Quindi la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(x+1)^n}{n^\alpha}$ :

- converge (assolutamente)  $\forall x \in (-2, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ ;
- non converge  $\forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ . Inoltre in  $(0, +\infty)$  e a termini positivi ( $a_n > 0$  sempre) e quindi diverge  $\forall \alpha$ ;
- per  $x = -2$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n 4}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^\alpha}$ . Poiché  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge per  $\alpha > 1$ , dal teorema del confronto asintotico converge (assolutamente);
- per  $x = 0$   $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^\alpha}$  converge (assolutamente) come nel punto precedente per  $\alpha > 1$ ;
- per  $x = -2$  e  $0 < \alpha \leq 1$  per Leibniz converge semplicemente (non assolutamente),  $\alpha \leq 0$  non converge;
- per  $x = 0$  e  $\alpha \leq 1$  diverge ( $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^\alpha}$  armonica generalizzata).

Conclusioni:

La serie  $\begin{cases} \text{converge} \begin{cases} \text{assolutamente } \forall x \in (-2, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e} \\ \text{per } x = -2, 0 \text{ se } \alpha > 1, \\ \text{semplicemente } \forall x \in (-2, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e per} \\ x = 0 \text{ se } \alpha > 1, \text{ per } x = -2 \text{ se } \alpha > 0, \end{cases} \\ \text{non converge } \forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e per } x = -2 \\ \text{se } \alpha \leq 0, x = 0 \text{ se } \alpha \leq 1. \text{ In particolare } \text{diverge } \forall x \in (0, +\infty) \\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e per } x = 0 \text{ se } \alpha \leq 1. \end{cases}$

c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{n+1}$ , definiamo  $t = \frac{x+1}{x-1}$  e otteniamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} t^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} t^n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2} > 0 \forall n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ e } t_0 = 0.$$

Raggio di convergenza:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\rho} = 1.$$

Quindi la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{n+1}$ :

- converge (assolutamente)  $\forall t \in (-1, 1)$   $\Rightarrow -1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} < 1, \\ \frac{x+1}{x-1} > -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x-1} > 0, \\ \frac{2}{x-1} < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \vee x > 1, \\ x < 1, \end{cases} \Rightarrow \forall x \in (-\infty, 0);$$



• non converge  $\forall t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Inoltre in  $(1, +\infty)$  e' a termini positivi ( $a_n > 0$  sempre) e quindi diverge;

• per  $t=1$   $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  converge (assolutamente)  $\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1$ .

$\Rightarrow x =$  impossibile;

per  $t=-1$   $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge (assolutamente)  $\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = -1$ .

$\Rightarrow x = 0$ .

Conclusioni:

La serie  $\begin{cases} \rightarrow \text{converge assolutamente } \forall x \in (-\infty, 0], \\ \rightarrow \text{non converge } \forall x \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \text{ In particolare} \\ \quad \text{diverge } \forall x \in (1, +\infty), \\ \rightarrow \text{non e' definita per } x=1. \end{cases}$

## Esercizio 5:

Determinare il carattere delle seguenti serie in dipendenza del parametro quando è presente:

a)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$   $\leftarrow a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

• condizione necessaria:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(1 + \frac{1}{n}) = 0$ . ✓

• Osserviamo che per via del limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1 \text{ possiamo dire } \log(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi dato che  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$  diverge, per il critero del confronto asintotico anche  $\sum_{n=2}^{+\infty} \log(1 + \frac{1}{n})$  diverge.

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n}$ ,  $\beta \geq 0 \leftarrow a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

• condizione necessaria:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sim \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \begin{array}{ll} \frac{\beta^n}{\beta^n} = 1 & \beta > 4, \\ \frac{4^n}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} & \beta = 4, \\ (\frac{\beta}{4})^n = 0 & 2 < \beta < 4, \\ 2(\frac{1}{2})^n = 0 & \beta = 2, \\ (\frac{1}{2})^n = 0 & 0 \leq \beta < 2. \end{array} \right] \neq 0$$

Quindi  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n}$  diverge  $\leftarrow$  non converge +  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$ .  
per  $\beta \in [4, +\infty)$ . ✓

• studiamo la serie per  $\beta \in [0, 4)$ :

i)  $\beta \in [0, 2)$   $\rightarrow \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n} \sim \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$  converge, quindi per il critero del confronto asintotico  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n}$  converge;

ii)  $\beta = 2$   $\rightarrow \frac{2^n + 2^n}{2^n + 4^n} \sim 2 \cdot \frac{1}{2^n}$   $\leftarrow$  geometrica come prima converge;

iii)  $\beta \in (2, 4)$   $\rightarrow \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n} \sim \left(\frac{\beta}{4}\right)^n$   $\leftarrow$  geometrica come prima converge.

Conclusioni:

$\leftarrow$  termini positivi sempre conv. ass.

La serie  $\rightarrow$  converge (assolutamente) per  $\beta \in [0, 4)$ ,  
 $\rightarrow$  diverge per  $\beta \in [4, +\infty)$ .