

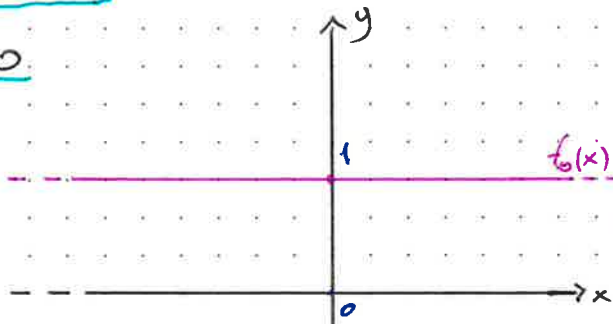
Esercitazione Fisic 22/09/23

Esercizio 1:

- Rappresentare il grafico di $f_\alpha(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0}\}$, dopo averne determinato il dominio. $\leftarrow$ codominio $\mathbb{R}$.
- Discutere iniettività, suriettività e biettività di f_α . $\leftarrow$ o Giunivolta

Svolgimento:

i) $\alpha = 0$



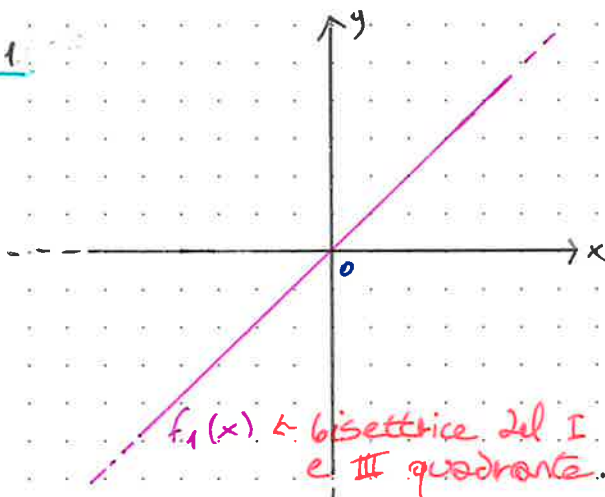
$$f_0(x) = 1,$$

$$D = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f_0) = \{1\},$$

$f_0(x)$ non è né iniettiva, né suriettiva né ovviamente biettiva.

$\uparrow$ è suriettiva se si restringe il codominio a $\{1\}$.

ii) $\alpha = 1$

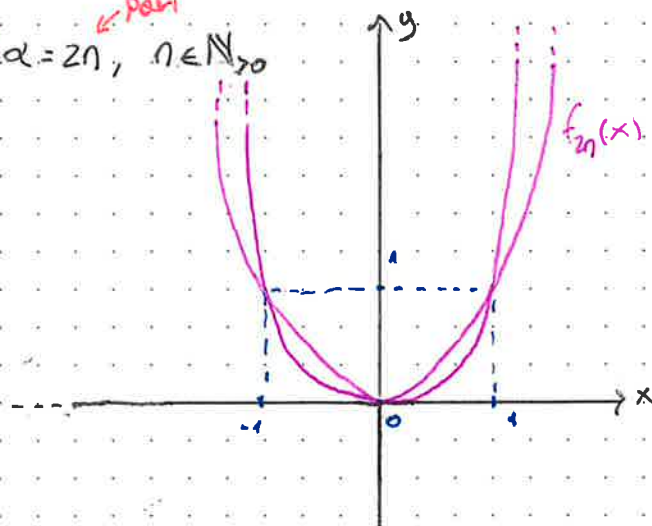


$$f_1(x) = x,$$

$$D = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f_1) = \mathbb{R},$$

$f_1(x)$ è iniettiva, è suriettiva e quindi è biettiva.

iii) $\alpha = 2n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\leftarrow$ pari



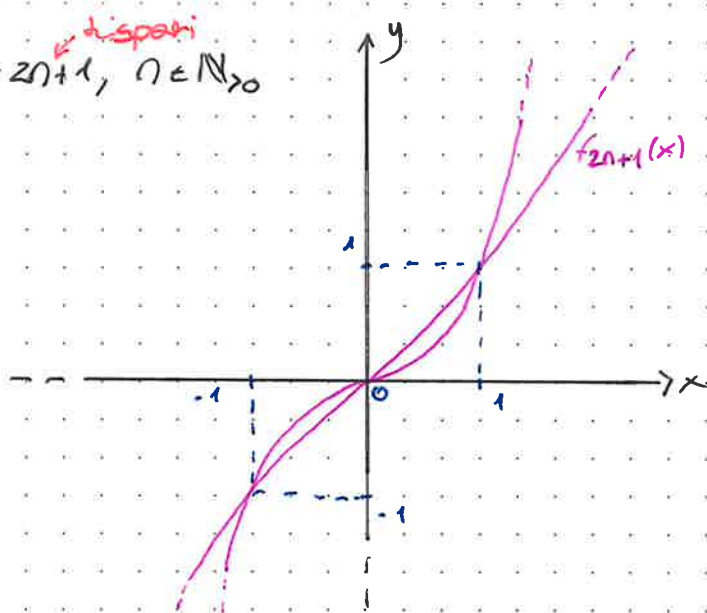
$$f_{2n}(x) = x^{2n},$$

$$D = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f_{2n}) = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

$f_{2n}(x)$ non è né iniettiva, né suriettiva, né ovviamente biettiva.

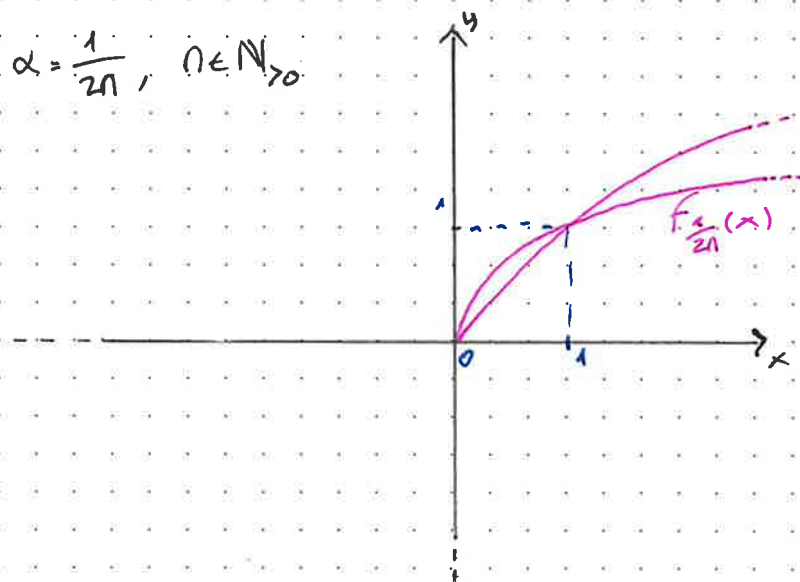
$\uparrow$ è suriettiva se si restringe il codominio a $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iv) $\alpha = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$



$f_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$,
 $D = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f_{2n+1}) = \mathbb{R}$,
 f_{2n+1} è iniettiva, e
 suriettiva e quindi
è biettiva.

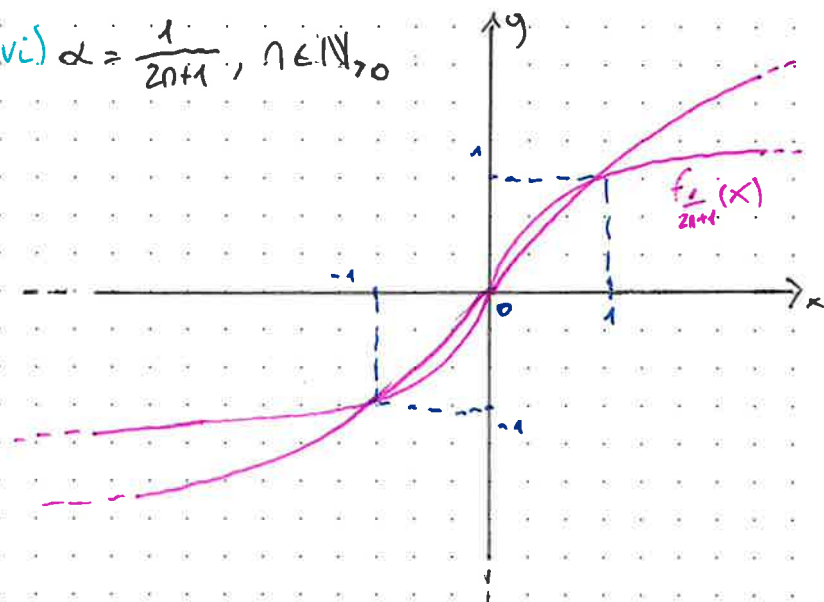
v) $\alpha = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$



$f_{\frac{1}{2n}}(x) = x^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[n]{x}$,
 $D = \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e
 $\text{Im}(f_{\frac{1}{2n}}) = \mathbb{R}_{\geq 0} = D$,
 $f_{\frac{1}{2n}}$ è iniettiva, ma non
 suriettiva.

↑
 sarebbe suriettiva e quindi
 biettiva se restringessimo
 il codominio a $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

vi) $\alpha = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$



$f_{\frac{1}{2n+1}}(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} = \sqrt[2n+1]{x}$,
 $D = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f_{\frac{1}{2n+1}}) = \mathbb{R}$,
 $f_{\frac{1}{2n+1}}$ è iniettiva, e
 suriettiva e quindi è
biettiva.

Esercizio 2:

- Stabilire se $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva utilizzando la definizione.

$$x \mapsto \frac{1}{x} + x$$

Svolgimento:

Definizione di iniettività: $\forall x, y \in D, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Siano $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che $f(x) = f(y)$,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1}{x} + x = \frac{1}{y} + y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = y - x$$

$$\Rightarrow \frac{y-x}{xy} = y-x \Rightarrow xy = 1$$

- Controesempio: $x = \frac{1}{3}, y = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 3 = f(y)$, ma $x \neq y$.

$f(x)$ non è iniettiva.

Esercizio 3:

Date

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{per } x \geq -1, \\ x^2 & \text{per } x < -1, \end{cases}$$

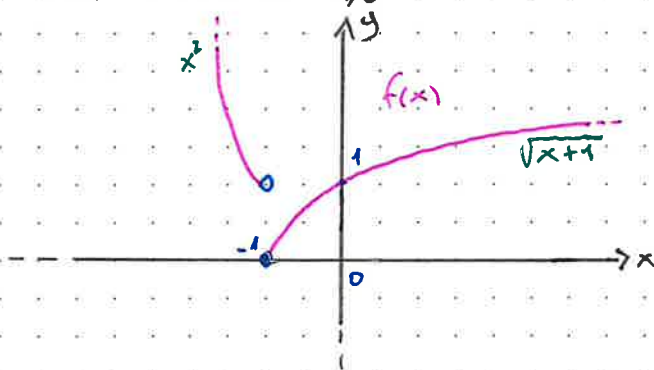
e $g(x) = \log(|x|-1)$, determinare dominio e immagine di f e g .

Determinare le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$.

Svolgimento:

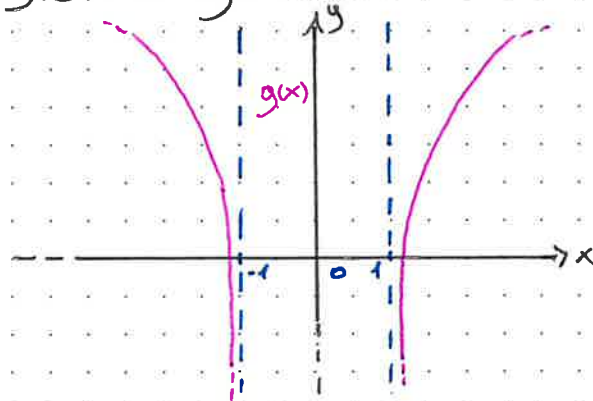
$$A = \text{dom}(f(x)) = \mathbb{R}, \leftarrow f \text{ è ben definita.}$$

$$f(A) = \text{Imm}(f(x)) = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$



$$B = \text{dom}(g(x)) = \{x \in \mathbb{R} : |x|-1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x > 1\},$$

$$g(B) = \text{Imm}(g(x)) = \mathbb{R}.$$



$$D(f \circ g) = \{x \in B : g(x) \in A\} = \{x \in B : g(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} = B.$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1} & \text{per } g(x) \geq 1 \text{ e } |x| \geq 1, \\ \log^2(|x|-1) & \text{per } g(x) < 1 \text{ e } |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$g(x) \geq -1 \Rightarrow \log(|x|-1) \geq -1 \Rightarrow |x|-1 \geq e^{-1} \Rightarrow |x| \geq 1 + \frac{1}{e} \Rightarrow x \leq -1 - \frac{1}{e} \vee x \geq 1 + \frac{1}{e}.$$

Quindi $f \circ g(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1} & x \leq -1 - \frac{1}{e} \vee x \geq 1 + \frac{1}{e}, \\ \log^2(|x|-1) & -1 - \frac{1}{e} < x < -1 \vee 1 < x < 1 + \frac{1}{e}. \end{cases}$

$D(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < -1 \vee f(x) > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty).$

$g \circ f(x) = g(f(x))$ = $\begin{cases} \log(|\sqrt{x+1}|-1) & \text{per } x \geq -1, \overset{\text{dom}(f)}{|\sqrt{x+1}|} > 1, \\ \log(|x^2|-1) & \text{per } x < -1, |x^2| > 1, \\ \log(|\sqrt{x+1}|-1) & \text{per } x > 0, \\ \log(x^2-1) & \text{per } x < -1. \end{cases}$

NOTA: $f \circ g \neq g \circ f$.

Esercizio 4:

Risolvere le seguenti equazioni

a) $\sin(\arcsin(x+2)) = \frac{x}{3},$

b) $\sin(\arcsin(x+2)) = 4x.$

Osservazione: Il seno non è una funzione iniettiva (anzi è periodica). Di conseguenza per invertirla ($\arcsin$) bisogna restringere il dominio e il codominio. Entrambi devono essere contenuti o uguali a $[-1, 1]$.
 ⚠ Bisogna riportare ciò anche nelle equazioni.

Svolgimento:

a) Dominio: $-1 \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1$

Immagine: $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

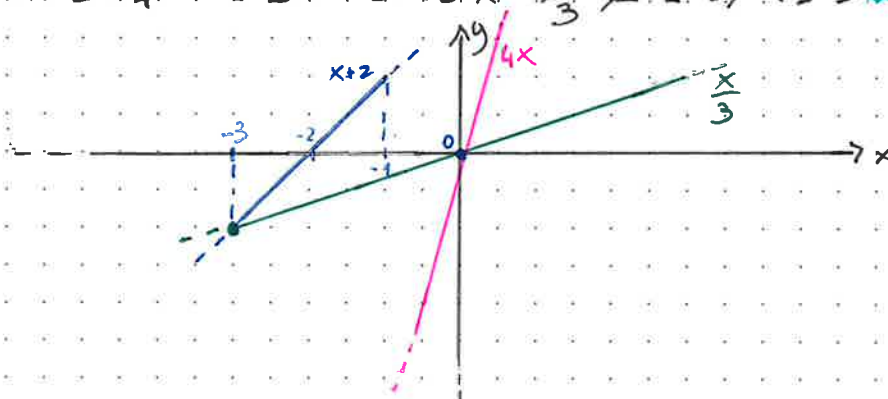
$x+2 = \frac{x}{3} \Rightarrow 3x+6 = x \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \in [-3, -1] \Rightarrow$ **ACCETTABILE!**

b) Dominio: come sopra $\Rightarrow -3 \leq x \leq -1$

$\Rightarrow$ **NON** soluzione.

Immagine: $-1 \leq 4x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$

$x+2 = 4x \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \notin [-3, -1] \Rightarrow$ **NON ACCETTABILE!**



Esercizio 5:

Discutete per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza $n! > 5^{n-4}$.
 $P(n)$

Svolgimento:

Passo induttivo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\text{Supponiamo } n! > 5^{n-4}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) 5^{n-4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp. induttiva}}}{\geq} 5 \cdot 5^{n-4} = 5^{(n+1)-4}$$

$n+1 \geq 5 \Rightarrow n \geq 4$

Passo base:

$$P(4): 4! > 5^0 \text{ vero} \Rightarrow P \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4.$$

$$P(3): 3! > 5^{-1} \text{ vero} \Rightarrow P \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

$$P(2): 2! > 5^{-2} \text{ vero} \Rightarrow P \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

$$P(1): 1! > 5^{-3} \text{ vero} \Rightarrow P \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

$$P(0): 0! > 5^{-4} \text{ vero} \Rightarrow P \text{ vale } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 6:

Sia $P(n) = "n^3 + 5n \text{ è divisibile per } 6"$. Dimostrare che vale $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Svolgimento:

Passo base:

$$n=1, P(1) = "6 \text{ è divisibile per } 6" \text{ vero.}$$

Passo induttivo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\bullet P(n+1) = (n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5$$

$$= \underbrace{n^3 + 5n}_{\substack{\text{divisibile per} \\ 6 \text{ per hp. ind.}}} + \underbrace{3n(n+1)}_{\substack{\text{divisibile per} \\ 6 \text{ dato che} \\ n \cdot (n+1) \text{ è pari.}}} + \underbrace{6}_{\substack{\text{divisibile} \\ \text{per } 6.}}$$

$$\Rightarrow P(n+1) \text{ è vero dato } P(n).$$

Esercizio 7:

Dimostrare che $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\forall q \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

grazie alla convenzione $0^0 = 1$ vale anche per $q=0$.

NOTA: $\sum_{k=0}^n q^k$ è detta somma di n termini di una progressione geometrica,
 q è detto "ragione" della progressione.

Svolgimento:

Passo base: per $n=0$ $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$

Passo indutivo, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$