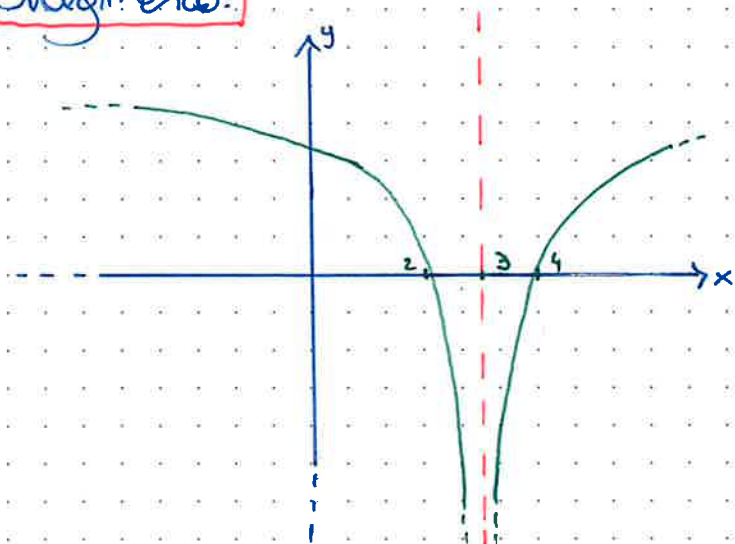


Esercizi extra 22/09/2023.

I) Rappresentare il grafico di $f(x) = \log(|x-3|)$ dopo averne determinato il dominio. Discutere iniettività, suriettività e biettività di f .

Svolgimento:



Dominio: $|x-3| > 0 \Leftrightarrow x \neq 3$
 asintoto verticale per $x=3$
 $\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e

$\text{Imm}(f(x)) = \mathbb{R}$.

$f(x)$ è suriettiva, ma non iniettiva.

II) Stabilire suriettività e iniettività delle seguenti funzioni

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

a) $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ t.c. $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow (1-x)(1+y) = (1-y)(1+x)$
 $\Rightarrow 1+y-x-x\cdot y = 1+x-y-x\cdot y \Rightarrow 2y = 2x$
 $\Rightarrow x = y \Rightarrow f(x)$ è iniettiva.

$\frac{1-x}{1+x} = y \Rightarrow 1-x = y + xy \Rightarrow 1-y = x(1+y) \Rightarrow$ se $y \neq -1, f(x) = y \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$
 se $y = -1, f(x) = -1 \Rightarrow 2 = 0$
 $\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ non è suriettiva.

NOTA: se restringiamo il codominio a $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, allora $f(x)$ è suriettiva e quindi anche biettiva, per cui ammette un'inversa

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x} = f(x)$.

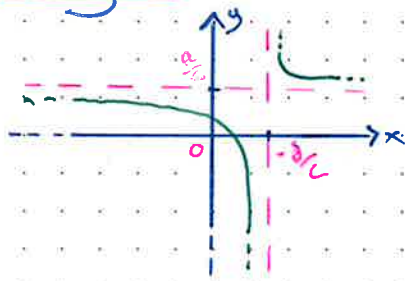
b) $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $ax + b = ay + b \Rightarrow ax = ay \Rightarrow$ $a=0$ $\Rightarrow f(x) = b$ non è niente
 $a \neq 0$ $f(x)$ è iniettiva, e suriettiva $\Rightarrow$ è biettiva
 $ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$ con $a \neq 0$.
 $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.

III) Per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione omografica definita da $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$. ← $c=0 \Rightarrow f(x) = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c} \Rightarrow$ punto 6) es. II.

- a) Determinare il dominio di f e la sua immagine; dire per quali valori di a, b, c e d f è iniettiva/suriettiva/biettiva.
 b) Scrivere la funzione inversa f^{-1} quando esiste e dire in quali casi $f^{-1} = f$.

a) Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : cx+d \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{d}{c}\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Immagine: $\text{Im}(f) = f(D) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : y = \frac{ax+b}{cx+d}\}$



$$= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in D : x(ax-cy) = dy-b\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : y \neq \frac{a}{c}\} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}.$$

Iniettività: $x, y \in D$ t.c. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d} \Rightarrow (ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d)$
 $\Rightarrow \cancel{ac}xy + \cancel{ad}x + \cancel{bc}y + \cancel{bd} = \cancel{ac}xy + \cancel{ad}y + \cancel{bc}x + \cancel{bd}$
 $\Rightarrow (ad-bc)x = (ad-bc)y$ no se $ad \neq bc$, f è iniettiva.

$ad=bc \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{cx+\frac{b}{a}} = \frac{a(ax+b)}{c(ax+b)} = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$ se $ad=bc$ f non è iniettiva.

Suriettività: $\frac{ax+b}{cx+d} = y \Rightarrow x = \frac{dy-b}{a-cy}$ se $y \neq \frac{a}{c}$. Quindi f non è suriettiva su $\mathbb{R}$, lo è se restringiamo il codominio a $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Quindi f è biettiva su $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ con $ad \neq bc$.

b) $ad \neq bc$, f invertibile, $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$
 $y \mapsto \text{l'unico } x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} : f(x) = y.$

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \frac{dy-b}{a-cy} \Rightarrow \underline{f^{-1}(y)} = \frac{dy-b}{a-cy}$$

$f = f^{-1}$:

$\text{dom}(f) = \text{dom}(f^{-1}) \Rightarrow \frac{a}{c} = -\frac{d}{c} \Rightarrow a = -d$ (condizione necessaria).

$f(x) = f^{-1}(x) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ con $a = -d$ ($d = -a$) $\Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{dx-b}{a-cx} = \frac{-(ax+b)}{-(cx+d)} = \frac{ax+b}{cx+d} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$

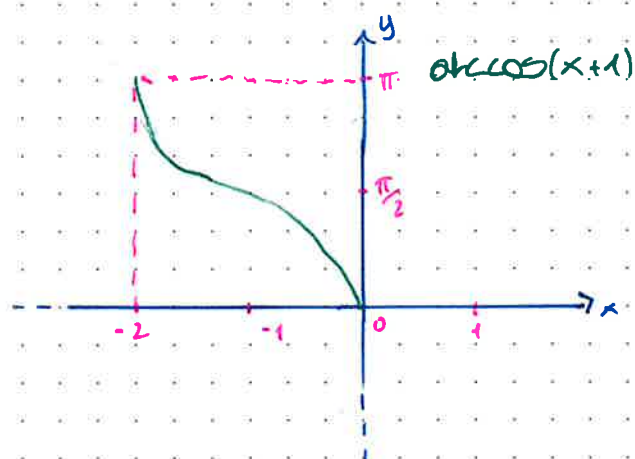
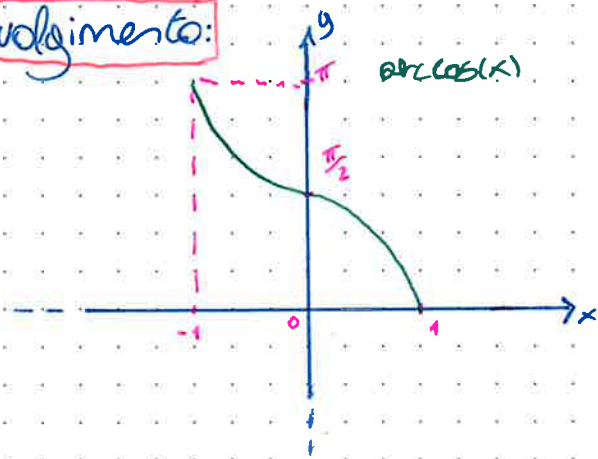
$\Rightarrow a = -d$ è condizione necessaria e sufficiente per $f = f^{-1}$.

IV) Rappresentare graficamente la funzione

$$f(x) = |\arccos(2x+1) - \frac{\pi}{2}|$$

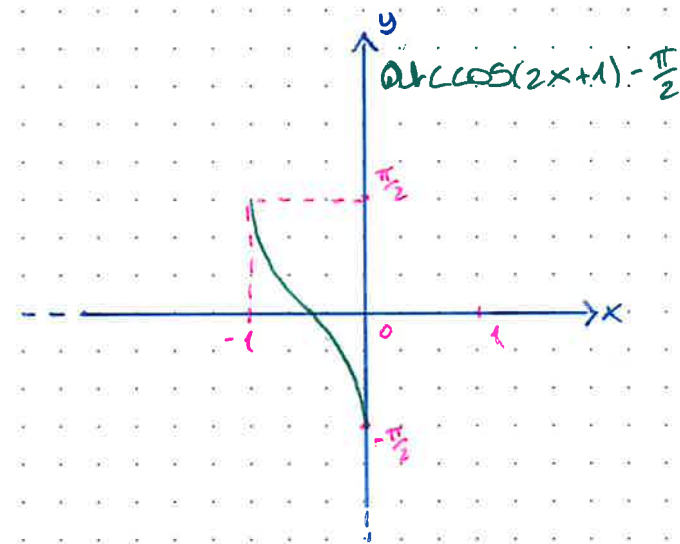
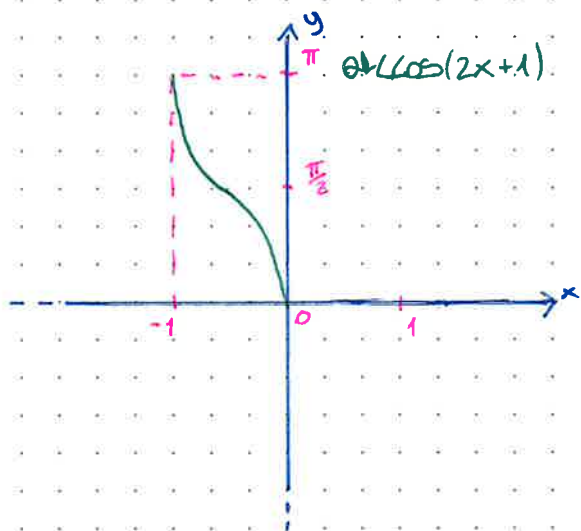
f è iniettiva?

Svolgimento:



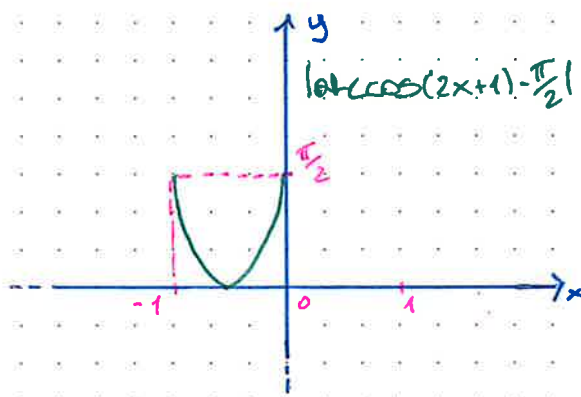
$$D = [-1, 1] \text{ e } I = [0, \pi].$$

$$D = [-2, 0] \text{ e } I = [0, \pi].$$



$$D = [-1, 0] \text{ e } I = [0, \pi].$$

$$D = [-1, 0] \text{ e } I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$



$$D = [-1, 0] \text{ e } I = [0, \frac{\pi}{2}].$$

$f(x)$ non è né iniettiva, né
 $\Rightarrow$ suriettiva né ovviamente biiettiva.
 è suriettiva se si restringe il
 codominio all'immagine.

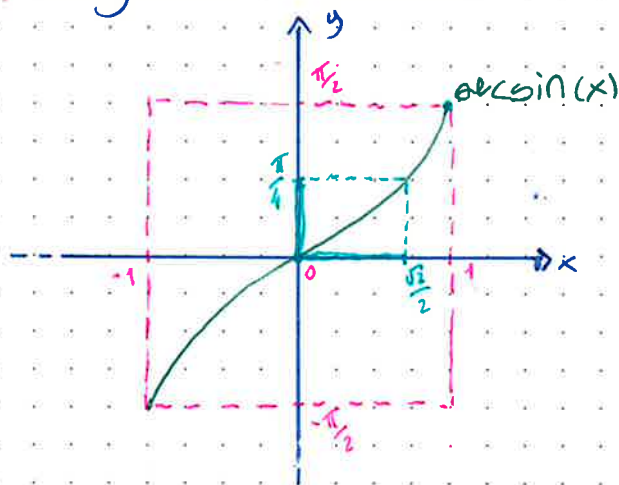
V) Siano $g: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
 $x \mapsto \arcsin x$ $x \mapsto \arctan(x)$

Determinare le seguenti controimmagini.

a) $g^{-1}([0, \frac{\pi}{4}])$ e $g^{-1}(\{0, \frac{\pi}{2}\})$,

b) $f^{-1}([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}])$ e $f^{-1}([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$.

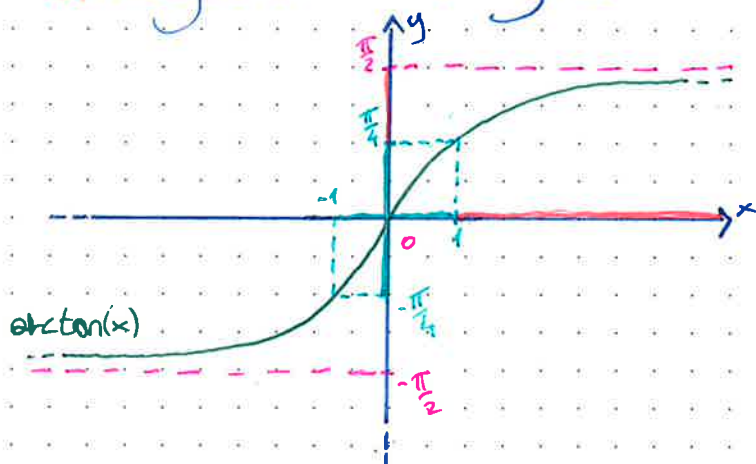
a) Disegniamo l'arcseno



$$\begin{aligned} g^{-1}([0, \frac{\pi}{4}]) &= [\sin(0), \sin(\frac{\pi}{4})] \\ &= [0, \frac{\sqrt{2}}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(\{0, \frac{\pi}{2}\}) &= g^{-1}(0) \cup g^{-1}(\frac{\pi}{2}) \\ &= \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \end{aligned}$$

b) Disegniamo l'arcotangente



$$\begin{aligned} f^{-1}([-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) &= [\tan(-\frac{\pi}{4}), \tan(\frac{\pi}{4})] \\ &= [-1, 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]) &= [\tan(\frac{\pi}{4}), +\infty) \\ &= [1, +\infty) \end{aligned}$$

VI) Dimostrare che $\forall n \geq 2$ $r_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \notin \mathbb{Q}$.
n volte

Sudgimento:

Passo base: Per $n=2$ $r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

NOTA: per $n=1$, $r_1 = \sqrt{1} = 1 \in \mathbb{Q}$.

Passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ($\neg P(n+1) \Rightarrow \neg P(n)$)

$r_{n+1} = \sqrt{1 + r_n}$, supponiamo $r_{n+1} \in \mathbb{Q}$, ovvero $\exists p, q \neq 0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$r_{n+1} = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{1 + r_n} = \frac{p}{q} \Rightarrow 1 + r_n = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow r_n = \frac{p^2}{q^2} - 1 = \frac{p^2 - q^2}{q^2} \in \mathbb{Q},$$

ma per hp. induttiva $r_n \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow r_{n+1} \notin \mathbb{Q}$.

VIII) Dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ vale la seguente identità:

$$\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Svolgimento:

Passo base: Per $n=1$ $\sum_{i=0}^1 i^2 = 0^2 + 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=0}^n i^2 + (n+1)^2 \stackrel{\text{hp. induttiva}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$