

Esercitazione Fscil 29/09/23

Esercizio 1:

Siano

I) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

e

II) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0, \\ \sqrt{x+4} & x > 0. \end{cases}$

- Discutere iniettività e suriettività.
- Trovare, dove possibile, la funzione inversa.
- Rappresentare f, g, f^{-1}, g^{-1} .
- Determinare $f^{-1}((-1, 1))$.

Svolgimento:

I)

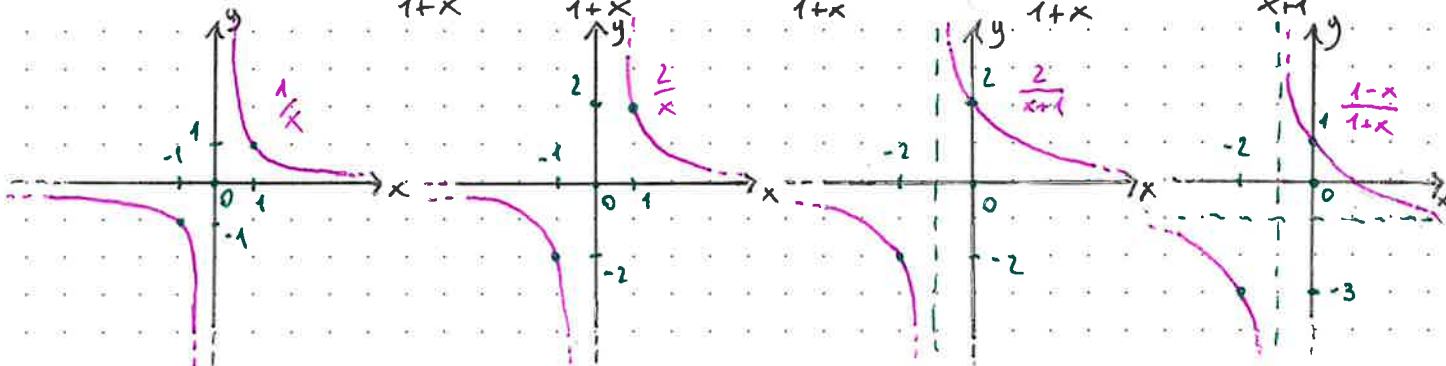
a) Iniettività: $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ t.c. $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y}$
 $\Rightarrow (1-x)(1+y) = (1-y)(1+x)$
 $\Rightarrow 1+y-x-xy = 1+x-y-xy$
 $\Rightarrow x=y \Rightarrow f(x)$ è iniettiva.

Suriettività: $\frac{1-x}{1+x} = y \Rightarrow 1-x = y + xy \Rightarrow 1-y = x(1+y)$ se $y \neq -1 \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$
se $y = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$

b) $f^{-1}(x)$ esiste se restringiamo il codominio di f all'immagine di f , ovvero $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. In questo caso f è biettiva con $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

NOTA: in questo esempio $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} f(x) = f^{-1}(x)$.

c) Dimostrare che $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} = 1 - \frac{2x+2-2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$



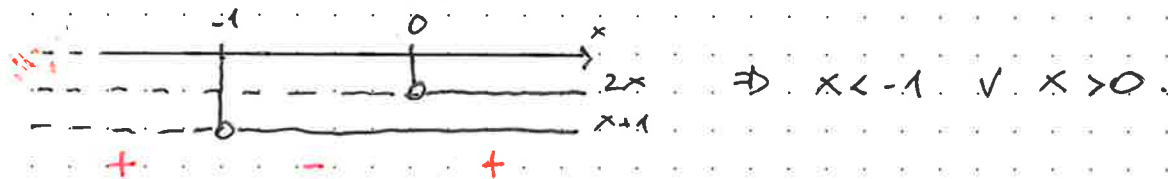
$$d) f^{-1}((-1, 1)) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : f(x) \in (-1, 1)\}.$$

Risolvere $-1 < f(x) < 1$:

$$\bullet -1 < f(x) \Leftrightarrow -1 < -1 + \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow \underline{x > -1}.$$

$$\bullet f(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{2-2x-2}{x+1} = -\frac{2x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0, \quad x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$



$f^{-1}((-1, 1)) = (0, +\infty)$ dato che deve valere $f(x) < 1 \wedge f(x) > -1$,
da cui $(x < -1 \vee x > 0) \wedge x > -1 \Rightarrow x > 0$.

II)

a) iniettività: $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = g(y)$.

Osservo che $g(x) < 2$ se $x < 0$ e $g(x) > 2$ se $x > 0$. $\nearrow g(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

Perché se $x < 0$ e $y > 0$
(o viceversa) ottengo
sicuramente $g(x) \neq g(y)$
($g(x) < 2 < g(y)$).

Ho quindi tre casi possibili:

$$\bullet x = y = 0, \text{ da cui } x+2 = 2 = y+2 \Rightarrow \text{iniettiva};$$

$$g(x) = x+2 \text{ se } x < 0. \bullet x, y < 0, \text{ da cui } x+2 = y+2 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{iniettiva};$$

$$g(x) = \sqrt{x+4} \text{ se } x > 0. \bullet x, y > 0, \text{ da cui } \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \Rightarrow x+4 = y+4 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{iniettiva}$$

$\Rightarrow g$ è iniettiva.

Suriettività: sia $y \in \mathbb{R}$. Dall'osservazione precedente abbiamo tre casi:

$$\bullet y = 2 \Rightarrow g(0) = 2;$$

$$y > 2 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+4} = y \Leftrightarrow x+4 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2 - 4;$$

$$y < 2 \Rightarrow g(x) = x+2 = y \Leftrightarrow x = y-2$$

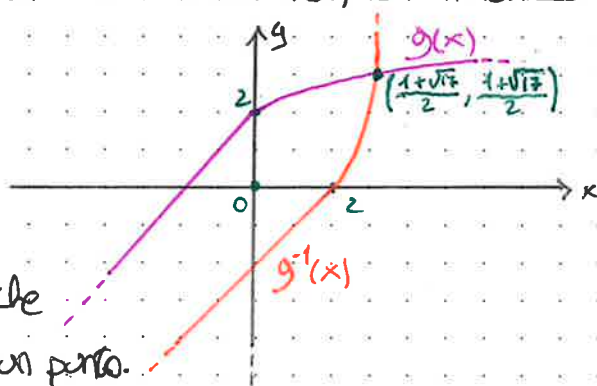
$\Rightarrow g$ è suriettiva.

b) g essendo suriettiva e iniettiva (cioè biettiva) è invertibile con

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2, \\ x - 2 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

c)

NOTA: In questo caso g e g^{-1} sono simmetriche
rispetto a $y=x$ e coincidono solo in un punto.



Esercizio 2:

Determinare $\sup$, $\inf$, $\max$, $\min$ dei seguenti insiemi:

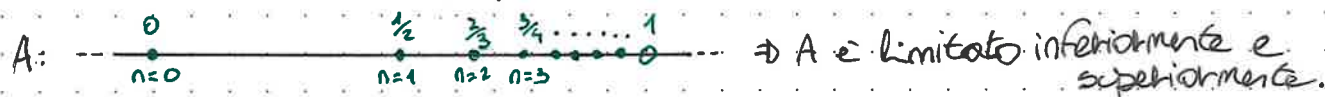
a) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$,

b) $B = \left\{ 2(-1)^n - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{\neq 0} \right\}$,

c) $C = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}_{\neq 0}, 0 < m < n \right\}$.

Solgimento:

a) Osserviamo che $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Quindi $A = \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.



• Poiché $0 \in A$ e $\frac{n}{n+1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\inf A = \min A = 0$.

• Dimostriamo che $\sup A = 1$. Proviamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$, ovvero $1 \leq n\varepsilon + \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ (vero).

In aula abbiamo visto che scegliendo 2 come candidato per il $\sup$ la disuguaglianza non era verificata.

b) $B = \underbrace{\left\{ 2 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \text{ pari} \right\}}_{B'} \cup \underbrace{\left\{ -2 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ dispari} \right\}}_{B''}$.

Osserviamo che $\forall x \in B'$ e $\forall y \in B''$ $x > y$. Quindi per il $\sup$ guardiamo B' e per l' $\inf$ B'' .

• Proviamo che $\sup B = \sup B' = 2$ ($2 \in B$, dato che $2 \notin B' \Rightarrow \nexists \max$):

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $2 - \frac{1}{2n} \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \varepsilon \geq \frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2(1+\varepsilon)} = n_\varepsilon$.

• $\forall n$ dispari $-2 - \frac{1}{2 \cdot 1} \leq -2 - \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2n} \Leftrightarrow n \geq 1$ (vero).

Dato che $-\frac{5}{2} \in B'' \notin B$, allora $\inf B'' = \inf B = \min B = -\frac{5}{2}$.

c) Da $m < n$ segue che $\frac{n}{m} > 1 \Rightarrow 1$ è minore.

Inoltre abbiamo che

• $\left\{ \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq C \Rightarrow \underline{\inf C = 1}$, $1 \notin C \Rightarrow \nexists \min$.

• $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} \subseteq C \Rightarrow \underline{\sup C = +\infty}$ (ovviamente $\nexists \max$ dato che C è illimitato superiormente).

Esercizio 3:

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \alpha \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f \geq \alpha.$$

Subgoalimento:

Se $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq \alpha$, allora α è un minorante. Da definizione $\inf f$ è il massimo dei minoranti, quindi la tesi.

Esercizio 4:

Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni distinte. Dimostrare che

$$a) \inf_{\mathbb{R}} (f+g) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g,$$

$$b) \sup_{\mathbb{R}} (f+g) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g.$$

Subgoalimento:

$$f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} (f+g) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g.$$

a) Grazie all'esercizio precedente basta dimostrare che

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$. Dato che per definizione

$f(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f$ e $g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} g \forall x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Da qui segue la tesi.

Osservazione:

In generale non è vero che $\inf (f+g) = \inf f + \inf g$.

Ad esempio prendiamo $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ e $g(x) = -f(x)$.

Allora $\inf (f+g) = \inf (f-f) = 0$ e $\inf f = -1$ e $\inf g = 0 \Rightarrow 0 \neq -1$ e $0 > -1$.

b) Analogamente all'esercizio 3 si può dimostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} f(x) \leq \alpha.$$

Dopo ciò si procede come nel punto a):

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$. Sapendo $f \leq \sup_{\mathbb{R}} f$ e $g \leq \sup_{\mathbb{R}} g$,

otteniamo $f(x) + g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g \forall x \in \mathbb{R}$. Da cui la tesi.

Esercizio 5:

Determinare $\sup \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ dove $f(x) = e^{-x} - 2$.

Svolgimento:

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, osservo che $A = f^{-1}((0, +\infty))$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 2 \Leftrightarrow e^{-x} > e^{\log(2)} \Leftrightarrow x < -\log(2).$$

Allora $-\log(2)$ è un maggiorante per A .

questo non vuol dire che $-\log(2)$ è sup, solo che è un maggiorante!!

Per dimostrare che $-\log(2)$ è il sup voglio dimostrare che $\forall \delta > 0 \exists x_\delta \in A : -\log(2) < x_\delta + \delta$.

Fissiamo $\delta > 0$, scegliamo $x_\delta = -\log(2) - \frac{\delta}{2}$. Osserviamo quindi che $f(x_\delta) = e^{\log(2) + \frac{\delta}{2}} - 2 = e^{\log(2)} e^{\frac{\delta}{2}} - 2 = 2e^{\frac{\delta}{2}} - 2 > 0$ e

$$x_\delta + \delta = -\log(2) + \frac{\delta}{2} > -\log(2).$$

NOTA: Non confondere $\inf \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ con $\inf_{x \in \mathbb{R}} f$. Il primo è un sottoinsieme del dominio, il secondo è un sottoinsieme dell'immagine.

Esercizio 6:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ finito. Allora $\sup A = \max A$.

Svolgimento:

Dimostriamo che $\sup A \in A$ ($\Rightarrow \sup A = \max A$).

Per assurdo:

$\sup A \notin A$, allora per definizione di sup abbiamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A \text{ t.c. } x_n \neq \sup A \text{ e } \sup A - x_n < \frac{1}{n}.$$

Allora possiamo osservare che $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è un insieme infinito.

(poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ (infiniti n) $\exists x_n$) ed è contenuto in A per sua definizione.

A è, però, finito $\Rightarrow$ assurdo.

Quindi vale la tesi.