

Esercitazione Fisici 06/10/23

Esercizio 1:

Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

i) $\frac{1}{|z|\bar{z}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$,

ii) $\bar{z}(\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z)) = z$,

iii) $z^3 = 1$,

iv) $2z^2 + \bar{z} = -1$.

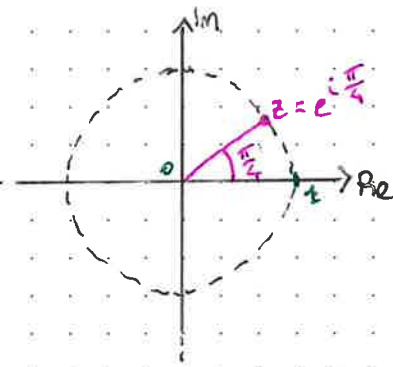
Svolgimento:

i) Osserviamo che $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = 1$ (perché $|e^{i\frac{\pi}{4}}| = |\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})| = |\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$) da cui

$$\left| \frac{1}{|z|\bar{z}} \right| = 1 \xrightarrow{|z| = |\bar{z}|} \frac{1}{|z|^2} = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Quindi $\frac{1}{\bar{z}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{1} = z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Graficamente

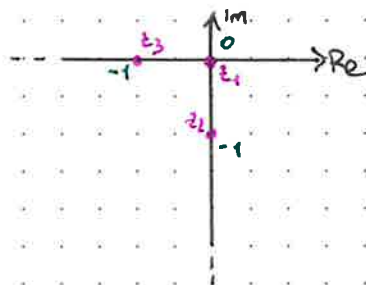


ii) Sia $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. L'equazione diventa $(a - ib)(b - a) = a + ib$.
Da cui $a(b - a) + i(a - b)b = a + ib$, ovvero $\begin{cases} a(b - a) = a \\ b(a - b) = b \end{cases}$

Se $a = 0$ otteniamo $\begin{cases} 0 = 0 \\ -b^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ b(1 + b) = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0 \vee b = -1 \Rightarrow \underline{z_1 = 0}, \underline{z_2 = -i}$.

Se $a \neq 0$ otteniamo $\begin{cases} a = b - 1 \\ b(a - b) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ -b = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z_3 = -1}$.

Graficamente



iii) $z^3 = 1 \Rightarrow$ radici terze di 1.

Preso $w = \rho e^{i\theta}$ ($\leftarrow$ argomento di w)
 (notazione esponenziale del numero complesso w),
 $\rho \leftarrow$ modulo di w

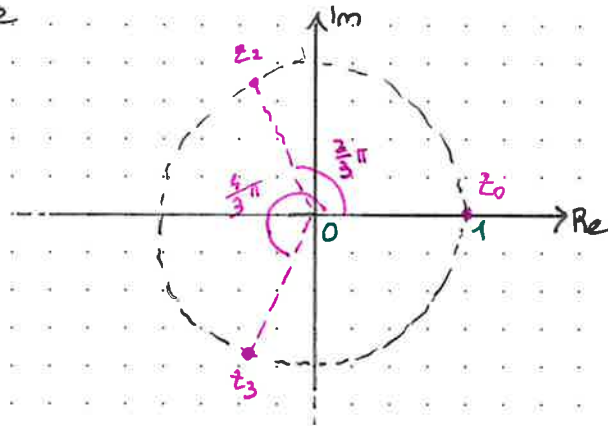
allora le sue radici n -esime sono definite come

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 32\pi}{n}}, \quad j=0, \dots, n-1.$$

Poiché $1 = 1 \cdot e^{i0}$, $z_j = \sqrt[3]{1} = e^{i \frac{2\pi}{3} j}$, $j=0, 1, 2$, quindi

$$\underline{z_0 = e^{i0} = 1}, \quad \underline{z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}}}, \quad \text{e} \quad \underline{z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}}}$$

Graficamente



iv) $z z^2 + \bar{z} = -1$. Sia $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, allora $z^2 = (a+ib)(a+ib)$.

Quindi $z(a+ib)(a+ib) + a - ib = -1 \Rightarrow 2a^2 + 4iab - 2b^2 + a - ib = -1$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2b^2 + a + i(4ab - b) = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 2b^2 + a = -1, \\ 4ab - b = 0. \end{cases}$$

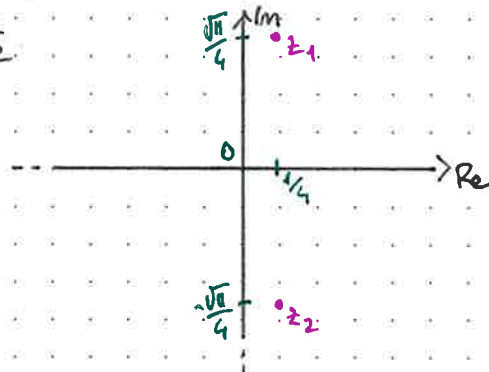
Se $b=0$, allora

$$\begin{cases} 2a^2 + a + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \text{nessuna soluzione.} \\ 0 = 0, \end{cases}$$

Se $b \neq 0$, allora

$$\begin{cases} 2a^2 - 2b^2 + a = -1, \\ b(4a - 1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} - 2b^2 + \frac{1}{4} = -1 \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \pm \sqrt{\frac{\pi}{16}}, \\ a = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{z_1 = \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{\pi}}{4}}, \quad \underline{z_2 = \frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{\pi}}{4}}.$$

Graficamente



Esercizio 2:

Risolvere le seguenti equazioni/sistemi in $\mathbb{C}$

i) $z^6 + i\bar{z}^3 = 0$,

ii) $z^2 - (3+i)z + 2 = 0$,

iii) $\begin{cases} \bar{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0, \\ \bar{w}^2 - z = 0. \end{cases}$

Svolgimento:

i) $z^6 + i\bar{z}^3 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -i\bar{z}^3$, passo ai moduli $|z^6| = |-i\bar{z}^3|$.

Siccome il modulo gode della proprietà distributiva sul prodotto e

$|-i| = 1$, si ha $|z|^6 = |z|^3 \Leftrightarrow |z|^3(|z|^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow |z| = 0 \vee |z| = 1$.

Caso $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$.

Caso $|z| = 1$ $\Rightarrow z^3 \cdot z^6 = -i\bar{z}^3 \cdot z^3 = -i(|z|^2)^3 = -i \Rightarrow z^9 = -i \Rightarrow z = \sqrt[9]{-i}$.

Per la formula di De Moivre $z_k = e^{i(\frac{3}{8}\pi + \frac{2}{9}k\pi)}$, $k=0, \dots, 8$.

NOTA: $-i = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} \Rightarrow \sqrt[9]{-i} = e^{i(\frac{3}{18}\pi + \frac{2}{9}k\pi)}$, $k=0, \dots, 8$.

ii) Applichiamo la formula risolutiva di secondo grado

$$z_{1,2} = \frac{(3+i) \pm \sqrt{(3+i)^2 - 8}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{9-1+6i+8}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{6i}}{2} = \frac{3+i \pm \sqrt{6}\sqrt{i}}{2}$$

$$\leftarrow \sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)} = \pm(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \pm\sqrt{6}\sqrt{i} = \pm\sqrt{6}\left[\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \pm\left(\frac{2\sqrt{3}}{2} + i\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \pm(\sqrt{3} + i\sqrt{3})$$

uno dei $\pm$ è ridondante $\Rightarrow$ lo omettiamo.

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

iii) Notiamo che nella prima equazione è presente w^2 e nella seconda

$\bar{w}^2$, quindi passiamo al coniugato della seconda e otteniamo

$$\begin{cases} \bar{z}^2 - 2w^2 + 2 = 0, \\ w^2 = \bar{z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}^2 - 2\bar{z} + 2 = 0, \\ w^2 = \bar{z} \Leftrightarrow w = \sqrt{\bar{z}}. \end{cases} \quad \text{modulo: } \sqrt{2}, \text{ argomento: } \pm\frac{\pi}{4}.$$

Risolviamo la prima per $\bar{z}$: $\bar{z} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i \Rightarrow z = 1 \mp i$.

Da cui otteniamo $\leftarrow$ modulo: $\sqrt{2}$, argomento $\pm\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{cases} z = 1+i, \\ w = \sqrt[4]{2} e^{i(-\frac{\pi}{8} + k\pi)}, \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} z = 1-i, \\ w = \sqrt[4]{2} e^{i(\frac{\pi}{8} + k\pi)}, \end{cases} \quad k=0, 1.$$

Esercizio 3:

Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, siano $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definite da

$$f(z) = z + z_0, \quad g(z) = iz \quad \text{e} \quad h(z) = z^2.$$

Siano $A, B, C \subseteq \mathbb{C}$ t.c.

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in [0, 1]\},$$

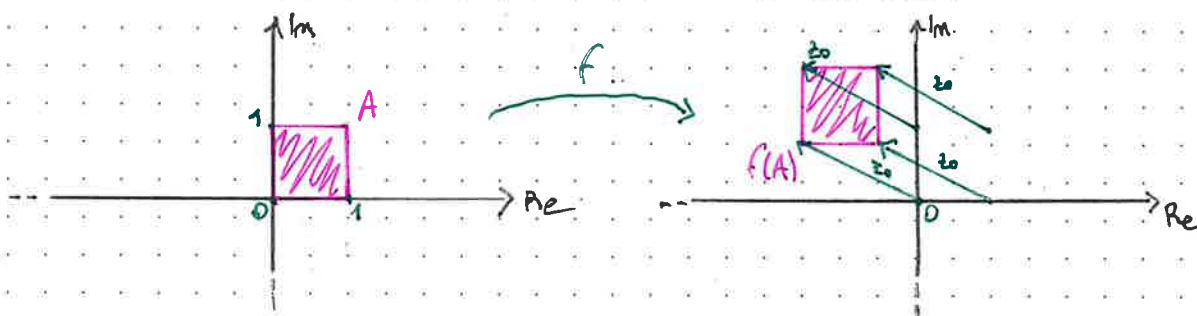
$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \arg(z) \in (\frac{3}{4}\pi, \pi)\},$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}.$$

Determina $f(A), g(B), h(B), h(C)$ e descrivi l'azione di queste funzioni.

Svolgimento:

- $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in [0, 1]\}, \quad f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_0 = a_0 + ib_0$
 $z \mapsto z + z_0$
 $(a+ib) \mapsto (a+a_0) + i(b+b_0)$

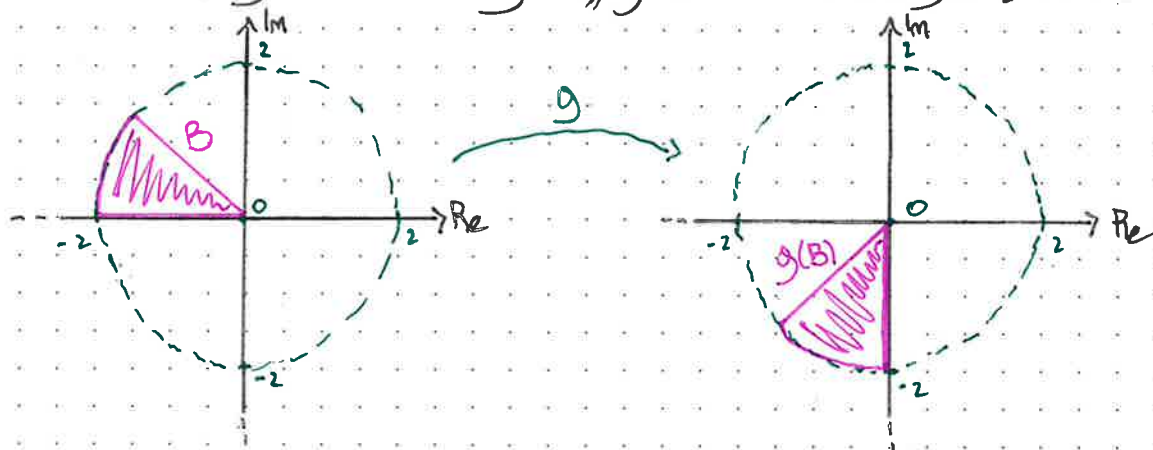


$$f(A) = \{f(z) : \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in [0, 1] = \{(a+a_0) + i(b+b_0) : a, b \in [0, 1]\}$$

$\Rightarrow$ è una traslazione di z_0 !

- $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \arg(z) \in (\frac{3}{4}\pi, \pi)\}, \quad g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto iz$

$$\Rightarrow z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))), \quad g(z) = iz = |z|(\cos(\arg(z) + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\arg(z) + \frac{\pi}{2})).$$

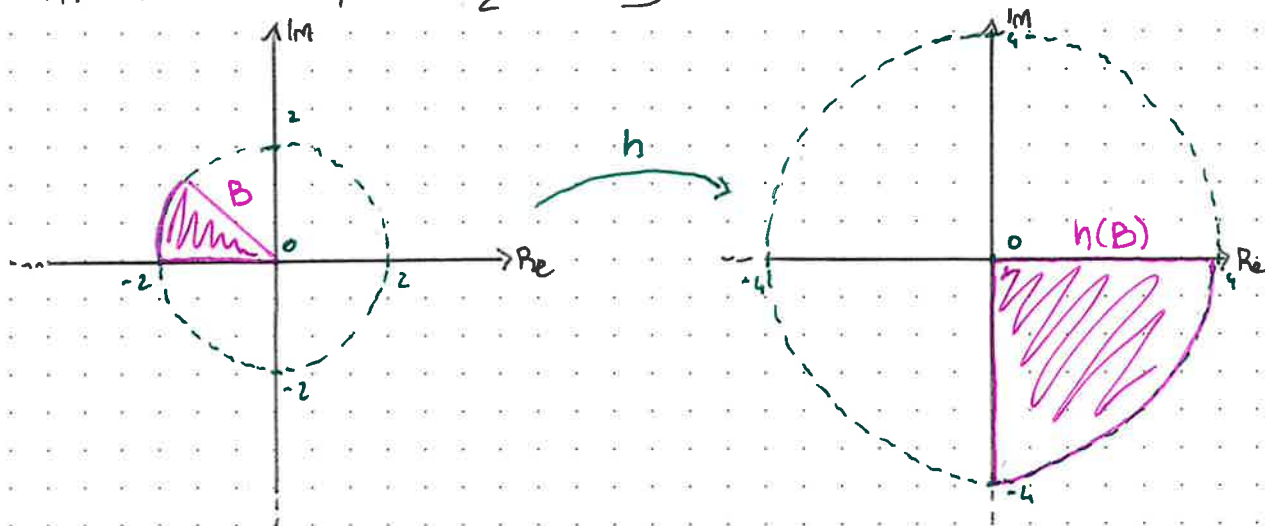


$$g(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \arg(z) \in (\frac{5}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi)\} \Rightarrow \text{è una rotazione di } \frac{\pi}{2}!$$

• $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \arg(z) \in (\frac{3}{4}\pi, \pi)\}$, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^2$

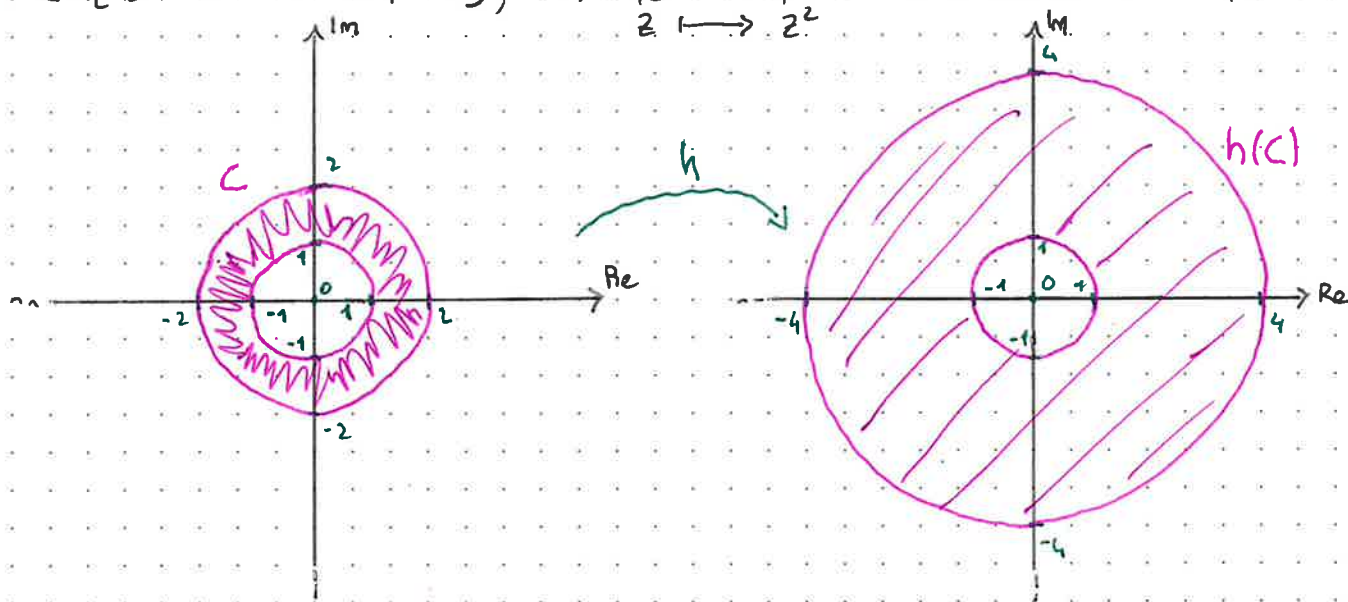
$\Rightarrow z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z)))$, $h(z) = z^2 = |z|^2(\cos(2\arg(z)) + i\sin(2\arg(z)))$,

$|h(z)| = |z|^2 \leq 4$ e $\frac{3}{2}\pi < 2\arg(z) < 2\pi$.



$h(B) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4 \text{ e } \arg(z) \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)\} \Rightarrow$ *è il quadrato di B.*

• $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$, $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^2 \Rightarrow 1 \leq |h(z)| \leq |z|^2 \leq 4$.



$h(C) = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 4\} \Rightarrow$ *è il quadrato di C.*

Esercizio 4:

Rappresentare in $\mathbb{C}$ i seguenti insiemi.

i) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{z-1}{z+1} = 1\},$

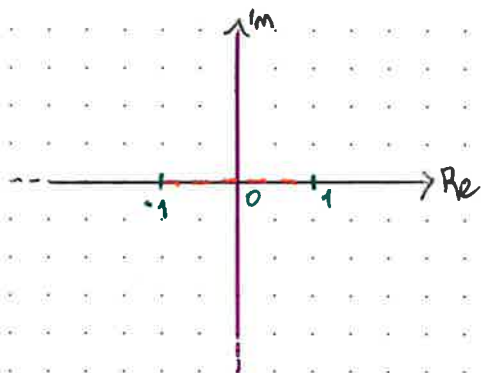
ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-i-2| < |z+2|, |z| \geq 1\}.$

Svolgimento:

i) $|z-1| = |z+1| \Leftrightarrow |z-1| = |z-(-1)|,$

$$z = a+ib \Rightarrow |a-1+ib| = |a+1+ib| \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = (a+1)^2 + b^2$$

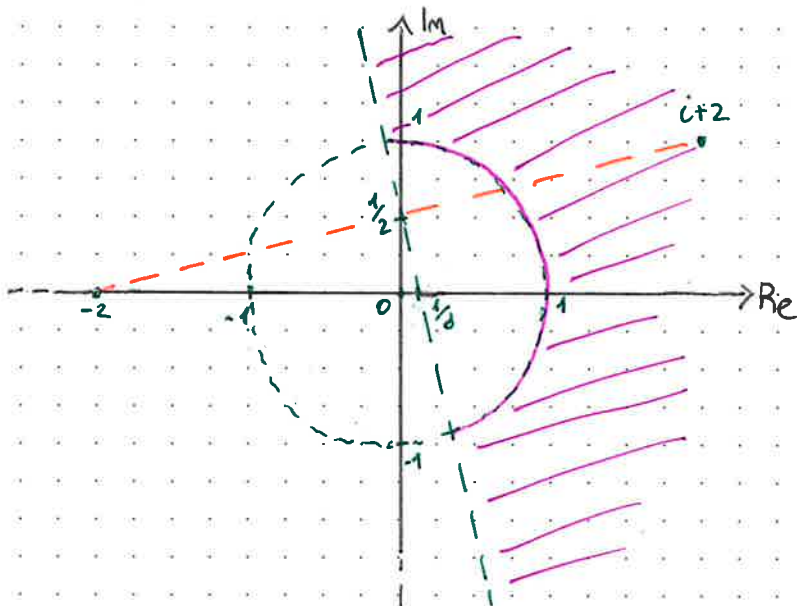
$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \Leftrightarrow a = 0.$$



ii) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-i-2| < |z+2|, |z| \geq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z-(i+2)| < |z-(-2)|, |z| \geq 1\},$

$$z = a+ib \Rightarrow |a-2+i(b-1)| < |a+2+ib| \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-1)^2 < (a+2)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 < a^2 + 4a + 4 + b^2 \Leftrightarrow 8a > 1 - 2b \Leftrightarrow a > \frac{1}{8} - \frac{b}{4}.$$



Esercizio 5:

Dimostrare le seguenti disuguaglianze

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \stackrel{a)}{\leq} \sqrt{ab} \stackrel{b)}{\leq} \frac{a+b}{2} \stackrel{c)}{\leq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$\uparrow$ medio armonica $\uparrow$ medio geometrica $\uparrow$ medio aritmetica $\uparrow$ medio quadratico

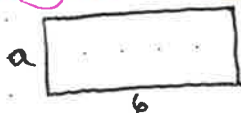
$$a) \quad \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \text{quindi se vale } b) \text{ vale anche } a).$$

$$b) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ VERO}$$

Significato geometrico ($4\sqrt{ab} \leq 2(a+b)$):



$$P = 2(a+b) \geq P = 4\sqrt{ab}$$

$$A = ab = A = ab$$

$\Rightarrow$ la disuguaglianza afferma che solo il quadrato è fra i rettangoli aventi la stessa area quello con perimetro min.

$$c) \quad \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ VERO}$$

Esercizio 6:

Calcolare $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$ delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$,

ii) $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$,

iii) $h(x) = \arccos(x) - \arcsin(x)$, $D = [-1, 1]$.

Soluzioni:

i) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$. Siccome è una potenza pari $f(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$, da cui $\inf_{\mathbb{R}} f \geq 0$. Inoltre $f(\pm 1) = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$.

Ora mostriamo che $\sup f = +\infty$ ($\exists \sup, \max$) $\Rightarrow \forall M > 0 \exists x \in \mathbb{R}: f(x) > M$.

Fissiamo $M > 0$, $(x^2 - 1)^2 > M \Rightarrow x^2 > \sqrt{M} + 1 \Rightarrow x > \sqrt{\sqrt{M} + 1} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$.

ii) Osserviamo che $g(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ e $g(x) \leq 0$ se $x \leq 0$. Inoltre

$g(-x) = -\frac{x}{1+x^2} = -g(x) \Rightarrow$ la funzione è dispari $\Rightarrow$ simmetrica

rispetto all'origine degli assi $\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}_{\geq 0}} g = -\inf_{\mathbb{R}} g = -\inf_{\mathbb{R}_{\leq 0}} g$.

Sappiamo che $g(1) = \frac{1}{2}$, dobbiamo provare che $g(x) \leq \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x+x^2+1-x-x^2-1+x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x-(x-1)^2}{x^2+1} = 1 - \frac{x}{x^2+1} - \underbrace{\frac{(x-1)^2}{x^2+1}}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq 1 - \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow 2 \frac{x}{x^2+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Quindi $\min_{\mathbb{R}} g = \inf_{\mathbb{R}} g = -\frac{1}{2}$ e $\max_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}} g = \frac{1}{2}$.

iii) Osserviamo che sia la funzione $\arccos(x)$ che $-\arcsin(x)$ hanno

minimo in $x = 1$, quindi

$$\inf_{\mathcal{D}} h = \min_{\mathcal{D}} h = h(1) = \arccos(1) - \arcsin(1) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{dato che } \underbrace{\arccos(x) - \arcsin(x)}_{\substack{\geq 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}}} \geq -\frac{\pi}{2}.$$

Analogamente si dimostra che $\sup_{\mathcal{D}} h = \max_{\mathcal{D}} h = h(-1) = \frac{3}{2}\pi$.