Esercitazione 5 - 13/10/23

Esercizio 1

Calcolare inf/sup/min/max delle seguenti funzioni.

i) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

ii) $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$

iii) $h(x) = \arccos(x) - \arcsin(x)$, $\mathrm{Dom}(h) = [-1, 1]$

Soluzione

i). Oss che $f(x) = (x^2-1)^2 \geq 0$.
Poiché $f(1) = 0$, allora $\inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$.

Inoltre, sia $n \in \mathbb{N}$. Allora $f\left(\sqrt{\sqrt{n}+1}\right) = n$. Quindi, $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$.

ii). Oss che $g(-x) = -g(x)$. $\Rightarrow$ g dispari.

Inoltre $g(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} g = \sup_{[0,+\infty)} g = -\inf_{(-\infty,0]} g = -\inf_{\mathbb{R}} g.$$

Limitiamoci quindi a determinare $\sup_{[0,+\infty)} g$

Per prima cosa $\sup_{[0,\infty)} g =: S > 0$. (infatti, per esempio, $g(1) = \frac{1}{2}$).

Proviamo a trovare maggioranti:

Per quali $\alpha > 0$, $g(x) \le \alpha \ \forall x \ge 0$?

$$g(x) \le \alpha \overset{\forall x}{\iff} x \le \alpha + \alpha x^2 \quad \forall x$$

$$\iff \alpha x^2 - x + \alpha \ge 0 \quad \forall x$$

$$\iff 1 - 4\alpha^2 \le 0.$$

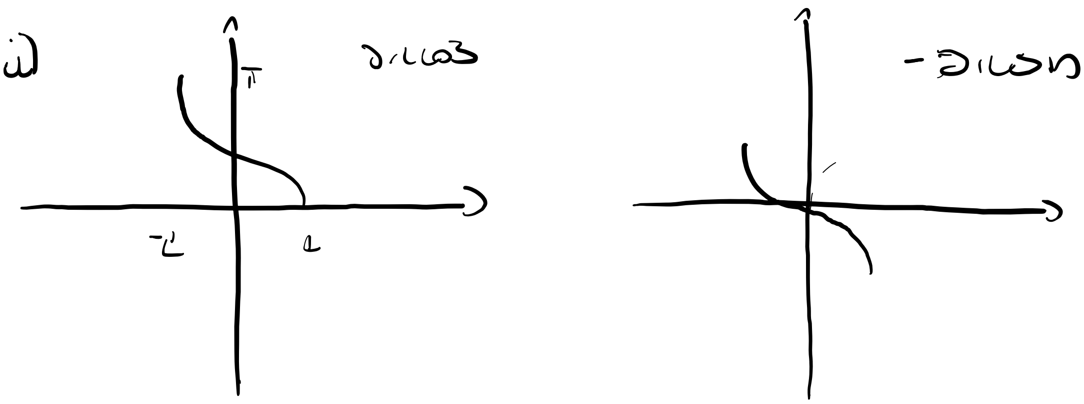
$$\iff \alpha^2 \ge \frac{1}{4}$$

$$\iff \alpha \ge \frac{1}{2}$$

Quindi $\alpha > 0$ è maggiorante $\iff \alpha \ge 1/2$.

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}$. Oss. inoltre che $g(1) = \frac{1}{2}$. $\Rightarrow S = \max_{\mathbb{R}} g$.

ii)



$\Rightarrow \min h = h(1) = -\pi/2$. $\max h = h(-1) = \frac{3}{2}\pi$.

MEMO - Limite Finito

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia x_0 pt. di accumulazione per D.

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esercizio 2

Dimostrare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

ii) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

iii) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = -4$

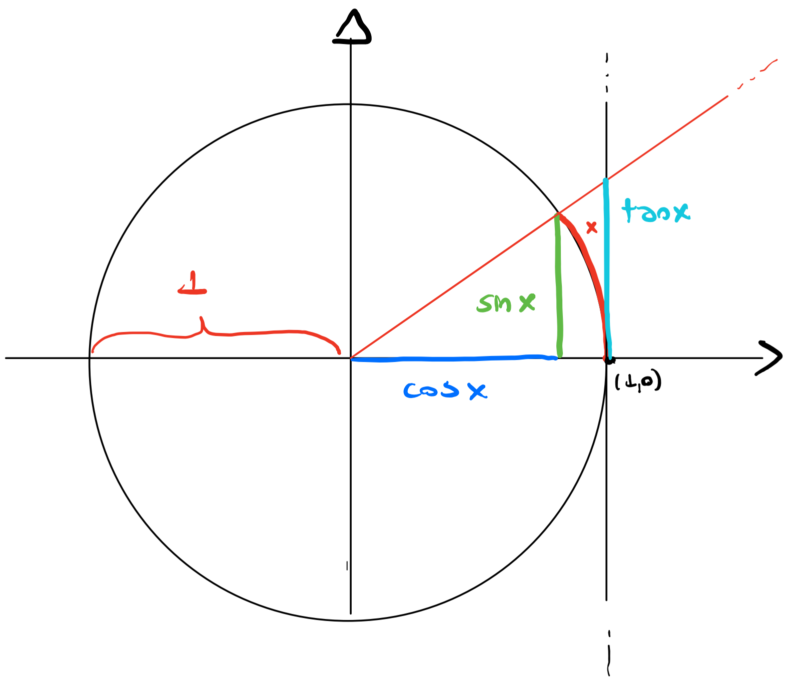
iv) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

v) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

vi) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Soluzione

Ricordiamo la definizione di seno, coseno e tangente.



Osserviamo che, se $x > 0$, $\sin x \leq x \leq \tan x$.

Inoltre, valgono i seguenti fatti: (PROVATE A DIMOSTRARLO!)

a) f dispari, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\lim_{x \to 0^-} f(x)$

b) f pari, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

i) $\sin x$ è dispari, quindi basta provare che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Fisso $\varepsilon > 0$. $\forall x > 0$, osservo che $\sin x \leq x \implies |\sin x| \leq |x|$.

Scelgo $\delta = \varepsilon$. Allora, se $|x| < \delta = \varepsilon$, $|\sin x| \leq |x| \leq \varepsilon$.

ii) Come sopra, dimostro che $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$

Fisso $\varepsilon>0$. Oss. che, per $x>0$, $\cos x \leq 1$.

allora $|\cos x - 1| = 1-\cos x$

$$= 1-\cos\left(2\frac{x}{2}\right)$$
$$= 1-\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)$$
$$= \cancel{\cos^2(x/2)}+\sin^2(x/2)-\cancel{\cos^2(x/2)}+\sin^2(x/2)$$
$$= 2\sin^2(x/2)$$

Osserviamo che $2\sin^2(x/2) \leq 2(x/2)^2 = \frac{1}{2}x^2$

Vogliamo che, se $x<\delta$, allora $\frac{1}{2}x^2<\varepsilon$.

Ma $\frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}\delta^2$. Scegliamo $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$.

Allora $1-\cos x = 2\sin^2 x/2 \leq \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon$.

iii) $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Inoltre, $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

Allora $f(x)=x-3$. Basta provare che

$\lim_{x\to -1}(x-3) = -4$ (PROVATECI VOI!)

iv) e v) Oss. che $\frac{\sin x}{x}$ e $\frac{\tan x}{x}$ sono pari. Ragioniamo quindi per $x>0$.

Ricordiamo che $0<\sin x \leq x \leq \tan x$

Quindi, $1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$

$\Rightarrow \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$

Per ii) e il Th. del confronto, si conclude iv)

Inoltre $1 \le \frac{\tan x}{x}$. Inoltre, da $\sin x \le x$,

segue $\frac{\sin x}{\tan x} \le \frac{x}{\tan x} \Rightarrow \frac{\tan x}{x} \le \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$

Per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \to 0} 1 \Big/ \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

Concludiamo ancora per confronto.

vi) Oss. che $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2}$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$$

Concludiamo grazie a iv) e algebra dei limiti.

$\boxed{///}$

Esercizio 3

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a|<1 \\ 1 & a=1 \\ +\infty & a>1 \\ \nexists & a\le -1 \end{cases}$

Soluzione

Se $a=1$, $a^n = 1$ $\forall n$. Ok

Se $a=-1$, $a^n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & n \text{ dispari} \\ 1 & n \text{ pari} \end{cases}$

Quindi, $\forall \ell \in \mathbb{R}$, $\exists\, \varepsilon>0$, $\forall M>0$, $\exists\, \bar{n}>M$ $|a_n-\ell|>\varepsilon$.

Se $\ell>0$, scelgo $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Fisso $M>0$.

Scelgo $\bar{n}>M$ dispari. Allora vale che

$|a_{\bar{n}}-\ell| = |\ell-1| > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$

Caso $\ell=0$, $\ell<0$: ESERCIZIO

Se $a > 1$, allora $a = 1 + b$, $b > 0$.

Allora $a^n = (1+b)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nb \to +\infty$

Per il th. del confronto, $\lim_n a^n = +\infty$.

Se $a = 0$. Ok

Se $a \in (0,1) \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow$

$\exists\, b > 0$ t.c. $\frac{1}{a} = 1 + b \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+b)^n \geq 1 + nb \Rightarrow$

$a^n \leq \frac{1}{1+nb} \to 0$. $\Rightarrow \lim_n a^n = 0$

Se $a \in (-1, 0)$ Oss che $\underset{\downarrow 0}{-|a|^n} \leq a^n \leq \underset{\downarrow 0}{|a|^n}$

Concludiamo per il th. del confronto.

Se $a < -1$. **ESERCIZIO** (NB come $a = -1$)

Esercizio 4 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Soluzione

Sia $a_n = \sqrt[n]{a_n}$, $b_n = \sqrt{a_n}$.

Poiché $a_n > 1$, allora $b_n > 1$.

$\Rightarrow \forall n \, \exists k_n > 0$ tc $b_n = 1 + k_n$

$\Rightarrow \sqrt{n} = b_n^n = (1+k_n)^n \geq 1 + nk_n$.

$\Rightarrow 1 + k_n \cdot n \leq \sqrt{n}$

$\Rightarrow k_n \leq \dfrac{\sqrt{n} - 1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.

$\Rightarrow a_n = b_n^2 = (1+k_n)^2 = (1+k_n)(1+k_n) \to 1$

per l'algebra dei limiti. $\blacksquare$