

Esercizio 1:

Gerarchia degli infiniti ← forma indeterminata

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \forall a > 1$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 + K, K > 0.$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a})^n = (1+K)^n \geq 1 + nK \geq nK \Rightarrow a^n \geq n^2 K^2.$$

$$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{n^2 K^2} = \frac{1}{n K^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow n \ll a^n \text{ per } n \rightarrow +\infty, \forall a > 1.$$

per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}, a > 1$:

• Se $p \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{|p|} a^n} = 0$.

• Se $p > 0$, otteniamo la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

• Se $p = k \in \mathbb{N}_+$, allora $\frac{n^p}{a^n} = \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt{a}^n}\right)^k = \left(\frac{n}{(\sqrt{a})^n}\right)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per a).

• Se $p \in \mathbb{R}_+$, consideriamo $[p]$, la parte intera di p , e abbiamo

$$n^{[p]} \leq n^p \leq n^{[p]+1} \Rightarrow \frac{n^{[p]}}{a^n} \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{[p]+1}}{a^n} \Rightarrow \text{thm. del confronto } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$$

$0 < \frac{n^{[p]}}{a^n} \leq \frac{n^{[p]+1}}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\Rightarrow [p] \in \mathbb{N}_+$, vale punto prec. $\rightarrow$ 0

$$\Rightarrow n^p \ll a^n \text{ per } n \rightarrow +\infty, \forall p \in \mathbb{R}, a > 1.$$

NOTA: Da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}, a > 1$ segue, grazie al teorema del limite delle funzioni composte, che $\forall$ successione $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^p}{a_n^{a_n}} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \quad \forall p \in \mathbb{R}$:

• Se $p = 0$, $\sqrt[n]{n^0} = \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

• Se $p = k \in \mathbb{N}_+$, $(\sqrt[n]{n^k}) = (\sqrt[n]{n})^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. prodotto finito di limiti finiti ($\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$).

• Se $p = -k \in \mathbb{Z}_-$, $(\sqrt[n]{n^{-k}}) = (\sqrt[n]{n})^{-k} = ((\sqrt[n]{n})^k)^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

• Se $p \in \mathbb{R}$, $n^{[p]} \leq n^p \leq n^{[p]+1} \Rightarrow \sqrt[n]{n^{[p]}} \leq \sqrt[n]{n^p} \leq \sqrt[n]{n^{[p]+1}}$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad \quad 1$

$$\Rightarrow \text{per il thm. del confronto } \sqrt[n]{n^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} = 0 \quad \forall b > 1, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}:$

• Se $\beta \leq 0$, $\frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{1}{(\log_b n)^{|\beta|} n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

• Se $\beta > 0$, otteniamo la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]:$

sia $a_n = \log_b n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, quindi $\frac{(\log_b n)^\beta}{n^\alpha} = \frac{(\log_b n)^\beta}{(b^{\log_b n})^\alpha} = \frac{(\log_b n)^\beta}{(b^\alpha)^{\log_b n}} =$
 $= \frac{a_n^\beta}{(b^\alpha)^{a_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \leftarrow \text{per nota di b)}.$

$\Rightarrow (\log_b n)^\beta \ll n^\alpha \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall b > 1, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}.$

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0:$

MODO 1:

• Se $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

• Se $a > 1$, otteniamo la forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]:$

osserviamo che $\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1}$, poiché

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0$, allora $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $0 < \frac{a}{n} < \frac{1}{2}$ ($\varepsilon = \frac{1}{2}$) $\forall n \geq \bar{n}$.

Quindi $\forall n \geq \bar{n}$, vale che $0 < \frac{a^n}{n!} = \left(\frac{a}{1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{\bar{n}}\right) \cdot \left(\frac{a}{\bar{n}+1} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n}\right) < \frac{a^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\bar{n}}}_{\downarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty}$

$\Rightarrow$ per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 1.$

MODO 2:

Usiamo il criterio del rapporto per successioni (es. 5.12 paradigma),

cioè: Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali positivi ($a_n > 0$)

Se $l=1$ non si può dire nulla.
 i) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,

ii) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

NOTA: dimostrazione per esercizio.

Calcoliamo quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

$\Rightarrow a^n \ll n! \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall a > 0.$

f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} \left[\frac{0}{\infty} \right]$:

MODO 1:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$\Rightarrow$ per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

MODO 2:

Usiamo di nuovo il criterio del rapporto per successioni,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

$\uparrow$
limite notevole

$\Rightarrow n! \ll n^n$ per $n \rightarrow +\infty$.

conclusione (gerarchia degli infiniti):

$$(\log_b n)^{\beta} \ll_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha} \ll_{n \rightarrow +\infty} a^n \ll_{n \rightarrow +\infty} n! \ll_{n \rightarrow +\infty} n^n$$

$b > 1, \beta \in \mathbb{R}$ per d) $\nearrow$ $\alpha > 0$ per b) $\nearrow$ $a > 1$ per c) $\nearrow$ per e) $\nearrow$ per f)

Approfondimento (criterio della radice per successioni):

Sia $(a_n)_n$ una successione a valori reali positivi ($a_n \geq 0$).

i) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

⚠ Se $l = 1$ non si può dire nulla sul limite della successione.

Dimostrazione:

i) $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l < 1$,  prendiamo $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ in modo che $l+\varepsilon = \frac{l+1}{2} < 1$.
 $\forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = \frac{l+1}{2} \Rightarrow 0 \leq a_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\Rightarrow$ per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l > 1$,  prendiamo $\varepsilon = \frac{l-1}{2}$ in modo che $l - \varepsilon = \frac{l+1}{2} > 1$.
 $\forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon = \frac{l+1}{2} \Rightarrow a_n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$\Rightarrow$ per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Esempi:

i) Studiare il comportamento della successione per $n \in \mathbb{N}_+$

$a_n = \frac{n^{43}}{6^n} > 0 \Rightarrow$ uso il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{43}}{6^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^{43}}}{\sqrt[n]{6^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^{43}}}{6} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{Punto 4) es. 1}} \frac{1}{6} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{43}}{6^n} = 0.$$

ii) Studiare la successione per $n \in \mathbb{N}_+$ $a_n = \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}} > 0$

$\Rightarrow$ uso il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}} = (\log n)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Esercizio 2:

Svolgere i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x} - \sqrt{1+x})$ [$\infty - \infty$]:

$$\sqrt{x} \cdot \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{1+x})(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})}{(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} \cdot (x - x - 1) = \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}.$$

Mostrare: RAZIONALIZZARE LE RADICI.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-e^x}$ [$\frac{0}{0}$]:

$$-\frac{x^2}{e^x - 1} = -x \cdot \frac{x}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

NOTA: abbiamo usato il limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Mostrare: RICONOSCERE I LIMITI NOTEVOLI.

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \log x \cdot \frac{1}{e^x - e}$ [$\frac{0}{0}$]:

$$\text{Prendiamo } y = \frac{x-1}{x} \Rightarrow \frac{\log(y+1)}{e^{y+1} - e} = \frac{\log(y+1)}{y} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{y}{e^y - 1} \xrightarrow[y \rightarrow 0]{y \rightarrow 0 \rightarrow 1} \frac{1}{e}.$$

NOTA: abbiamo usato il limite notevole di prima e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

Mostrare: CAMBI. DI VARIABILE INTELLIGENTI.

Esercizio 3:

Svolgere i seguenti limiti

i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2}$ $[1^\infty]$:

$$\left(\frac{1+n}{3+n} \right)^{n^2} = \left(\frac{(1+n)^n}{(3+n)^n} \right)^n = \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{3}{n})^n} \right)^n = \frac{\left((1+\frac{1}{n})^n \right)^n}{\left[(1+\frac{3}{n})^{\frac{1}{3}} \right]^{3n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{e^3} = 0.$$

NOTA: abbiamo usato il limite notevole $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{\log x}}$ $[\infty^0]$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{x} \right)^{\frac{1}{\log x}} &= e^{\log\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \frac{1}{\log x}} = e^{\frac{1}{\log x} \log\left(\frac{2}{x}\right)} = e^{\frac{1}{\log x} (\log(2) - \log(x))} = \\ &= e^{\left(\frac{\log(2)}{\log(x)} - 1 \right)} = e^{\frac{\log(2)}{\log(x)}} \cdot e^{-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^0 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}}$ $[0^0]$:

$$\left(\frac{1}{3x} \right)^{\frac{1}{\log(2x)}} = e^{\log\left(\frac{1}{3x}\right) \cdot \frac{1}{\log(2x)}} = e^{\frac{\log\left(\frac{1}{3x}\right)}{\log(2x)}} = e^{\frac{-\log(3x)}{\log(2x)}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Esercizio 4:

Determinare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan^2(2x) - \sin^2(2x)}{x^\gamma}$$

$$\frac{\tan^2(2x) - \sin^2(2x)}{x^\gamma} = \frac{\tan^2(2x)}{x^\gamma} (1 - \cos^2(2x)) = \frac{\tan^2(2x)}{x^\gamma} \sin^2(2x) =$$

$$= \left(\frac{\tan(2x)}{2x} \right)^2 \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right)^2 \cdot \frac{16}{x^{\gamma-4}}$$

$\downarrow x \rightarrow 0^+ \quad \downarrow x \rightarrow 0^+ \quad \downarrow x \rightarrow 0^+$
 $1 \quad 1 \quad 1$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} +\infty & 4 - \gamma < 0 \Rightarrow \gamma > 4, \\ 16 & 4 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 4, \\ 0 & 4 - \gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 4. \end{cases}$$

NOTA: abbiamo usato i limiti notevoli $\lim_{f(x) \rightarrow 0^+} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$ e $\lim_{f(x) \rightarrow 0^+} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$.

Esercizio 5:

Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.

Svolgimento:

- Dimostriamo che la successione è limitata superiormente,
cioè dimostriamo $1 \leq a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per costruzione, dimostriamo $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ per induzione:

- Passo base: $a_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,
- Passo induttivo: $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a_{n+1} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

- Dimostriamo che la successione è monotona crescente,
cioè $a_{n+1} \geq a_n$:

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \geq a_n \Rightarrow 1+a_n \geq a_n^2 \Rightarrow a_n^2 - a_n - 1 \leq 0$$

$\uparrow$ a_n è positiva per definizione $\Rightarrow$ posso elevare al quadrato

$$\Rightarrow a_{n+1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \wedge \quad a_n > 0 \Rightarrow 0 < a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dal primo punto sappiamo che $1 \leq a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi possiamo concludere che a_n è strettamente monotona crescente.

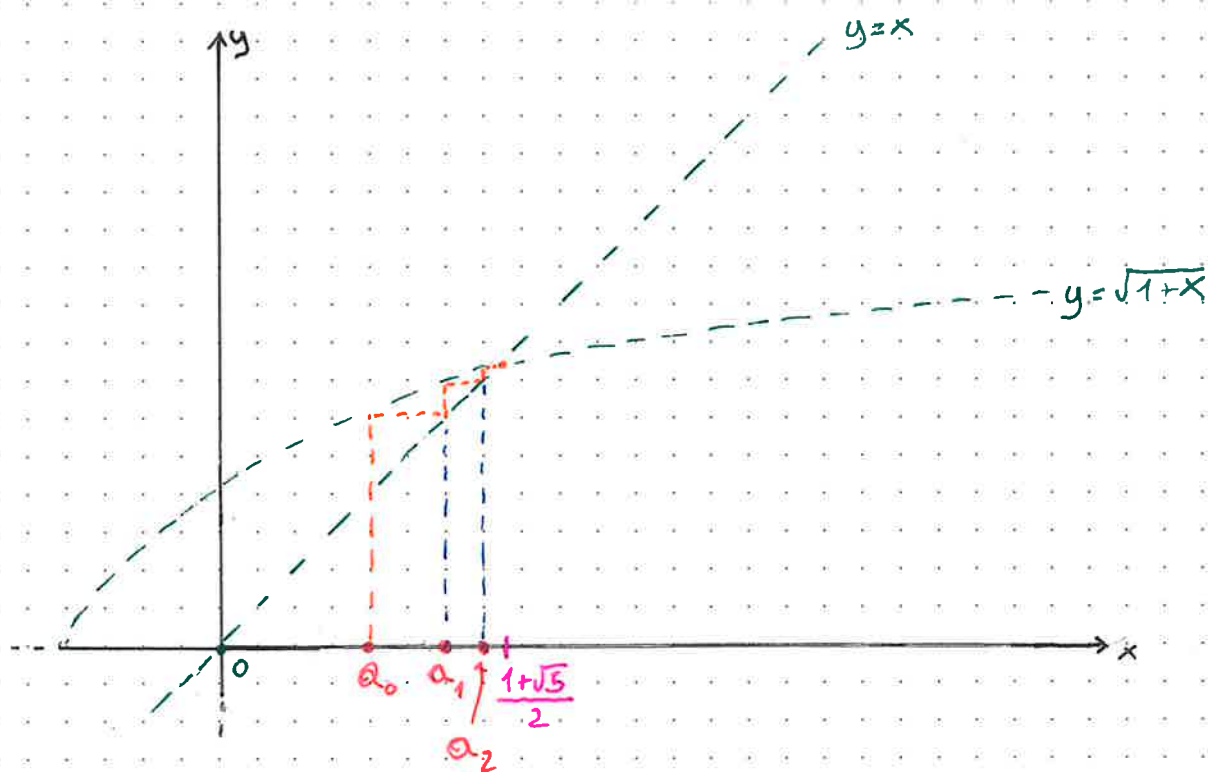
- Per il teorema di esistenza del limite di successioni monotone sappiamo che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = l$ finito:

algebra dei limiti ($\lim a_n < +\infty$) + continuità radice

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+a_n} \stackrel{!}{=} \sqrt{1+\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = \sqrt{1+l}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ solo } l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ è accettabile}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$



Esercizio 6:

Svolgere il seguente limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) x}{\sqrt{x+16} - 4}$$

Svolgimento:

Questo limite porta alla forma indeterminata

Proviamo quindi razionalizzando la radice:

$$\frac{\arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) x}{\sqrt{x+16} - 4} \cdot \frac{\sqrt{x+16} + 4}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{\arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) x (\sqrt{x+16} + 4)}{x+16-16} = \arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) (\sqrt{x+16} + 4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) x}{\sqrt{x+16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) (\sqrt{x+16} + 4) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{3}{x+1}\right) \cdot$$

*↑
algebra dei limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+16} + 4 = \arctan(3) \cdot 8 = 8 \arctan(3) \approx 9.9924$$