

Esercizio 0:

NOTA: Questo esercizio completa i limiti di successioni visti nell'esercitazione 5 (esercizi 3 e 4), ovvero $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$$

Svolgimento:

• $a > 1$:

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k_n > 0 \text{ t.c. } \sqrt[n]{a} = 1 + k_n$$

disuguaglianza di Bernoulli

$$\Rightarrow a = (1 + k_n)^n \geq 1 + n k_n \Rightarrow 0 < k_n \leq \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \text{per il teorema del confronto } k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + k_n) \stackrel{\text{algebra dei limiti}}{=} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 1.$$

• $0 < a < 1$:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k_n > 0 \text{ t.c. } \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 + k_n$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + k_n} \Rightarrow a = \frac{1}{(1 + k_n)^n} \stackrel{\text{disuguaglianza di Bernoulli}}{\leq} \frac{1}{1 + n k_n} \Rightarrow 1 + n k_n \leq \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 0 < k_n \leq \frac{\frac{1}{a} - 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \text{per il thm. del confronto } k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + k_n} = 1.$$

• $\alpha = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 \quad \forall \alpha > 0.$$