Esercitazione 7

Esercizio

Stabilire se $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0 \\ ke^x - 2 & x \leq 0 \end{cases}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$

Soluz. Sia $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x(\sqrt{x+1}-1)}$ e $h(x) = ke^x - 2$.

Oss. che f è continua su $(-\infty, 0)$ e h è continua su $(0, +\infty)$

Controlliamo quindi la continuità in 0.

- $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$
  $$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} (\sqrt{x+1}+1) = 2.$$

- $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = k-2.$$

Quindi g è continua in 0 $\iff k-2 = 2 \iff k = 4.$ $\blacksquare$

Esercizio

Stabilire se $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite come

$f(x) = \frac{x}{|x|} \sin x$ e $g(x) = \frac{x}{|x|} \cos x$ si estendono a funz. continue su $\mathbb{R}$.

Soluz. f e g sono continue su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Inoltre $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{x^2}{|x|} = 0.$

$\Rightarrow$ f si estende con continuità ponendo $f(0) = 0$.

D'altra parte,

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$ e

$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} -\cos x = -1.$

Allora g non si può estendere con continuità.

$\blacksquare$

Esercizio

Sia $g(x) = 1 - e^{\frac{1}{x^2-1}}$. Verificare che $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ è estendibile a una funz. continua su $\mathbb{R}$. Se fosse $g : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$?

Soluz. Oss che g è continua su $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Inoltre

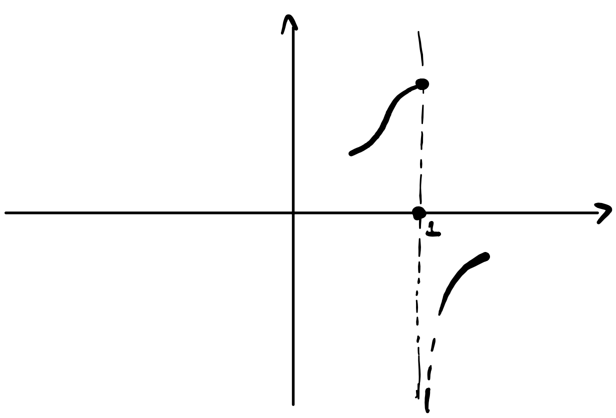
Poiché g è pari, ragioniamo solo per $x \geq 0$.

Oss. che $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 1$. Allora estendiamo $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$

ponendo $g(x) \equiv 1 \quad \forall |x| \geq 1$.

D'altra parte, $\lim_{x \to 1^+} g(x) = -\infty$,

quindi $g : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ non si può estendere con continuità.



$\boxed{//}$

Esercizio

Dimostrare che $x^5 + 2x^3 - 2 = 0$ ha un'unica soluz. reale x_0.
Trovare un intervallo di ampiezza $1/4$ che contenga x_0.

Soluz. Sia $f(x) = x^5 + 2x^3 - 2$. Oss. che f è <u>continua su $\mathbb{R}$</u>.

Inoltre $f(0) = -2$ e $f(1) = 1$.

Per Th. degli zeri, $\exists\, x_0 \in (0,1)$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Inoltre f è <u>strett. crescente</u>, poiché somma di funzioni strett. crescenti.

$\Rightarrow$ f è iniettiva $\Rightarrow$ x_0 è l'unico zero. Inoltre.

- $f(1/2) = 1/32 + 1/4 - 2 < 0$.

  $\Rightarrow x_0 \in (1/2, 1)$

- $f(3/4) = \dfrac{243}{1024} + \dfrac{54}{64} - 2 < 0$.

  $\Rightarrow x_0 \in (3/4, 1)$, che ha ampiezza $1/4$.

Esercizio

Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c. $g(0)=0$, $g(1)=-1$.

Per quali delle seguenti funzioni p l'equazione $p=g$

ha una soluz. in $[0,1]$ per ogni g come sopra?

$p(x) = x^2 + 1/2$, $p(x) = x^2 - 1/2$.

Soluz. Oss. che $p(x) = g(x) \iff p(x) - g(x) = 0$.

Inoltre $p-g$ è continua su $[0,1]$. Usiamo th. zeri.

- Se $p(x) = x^2 + 1/2$, allora $p(0) - g(0) = 1/2$

  e $p(1) - g(1) = 5/2$. Non possiamo

  usare th. zeri! Cerchiamo un controesempio

  Sia $g(x) = -x$. Allora $p(x) - g(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$.

  Infatti, $\Delta = 1 - 2 = -1$. $\Rightarrow p(x) - g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Se $p = x^2 - 1/2$, $p(0) - g(0) = -1/2$ e $p(1) - g(1) = 5/2$.

  $\Rightarrow \exists$ soluz. per th. zeri.

Esercizio

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in \mathbb{R}$.
Se f assume sia valori negativi che positivi in ogni intorno di x_0, allora $f(x_0) = 0$.

Soluz. Se per assurdo $f(x_0) \neq 0$, allora, essendo f continua, $\overbrace{\lim_{x \to x_0} f(x)}^{=\ell} \neq 0$. Supponiamo $\ell > 0$.

Allora, per la perm. del segno, $\exists$ un intorno di x_0 U t.c. $f(x) > 0 \ \forall x \in U$. Questo contraddice l'ipotesi.

Se $\ell < 0$, si ragiona allo stesso modo. $\square$

Esercizio

Sia $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, limitata e tale che $g(x) = x^3$ su $[-1,1]$ e $g(x) \leq -1$ se $|x| \geq 2$. g ha necessariamente massimo e minimo su $\mathbb{R}$?

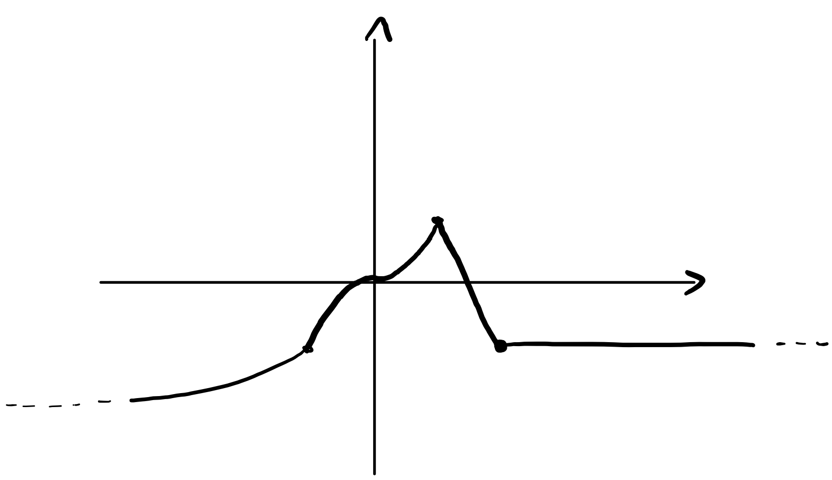
Soluz. Oss che g è continua su $[-2,2]$.

$\Rightarrow$ Per th. Weierstrass, $\exists \max\limits_{[-2,2]} g \geq g(1) = 1$.

Inoltre, $\forall x$ t.c. $|x| \geq 2$, $g(x) \leq -1$.

$\Rightarrow$ f ammette massimo.

Sia $f(x)$ come in figura:



Questa specifica f rispetta tutte le ipotesi ma <u>non</u> <u>ammette minimo</u>

(Es. Trovate una espres. esplicita di f)

$\boxed{//}$

Esercizio

Dim. che $f(x) = x^2 + x\cos x + \sin x$ ha minimo su $\mathbb{R}$.

Soluz. f è continua su $\mathbb{R}$.

Inoltre, $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 \left(1 + \overset{\nearrow 0}{\frac{\cos x}{x}} + \overset{\nearrow 0}{\frac{\sin x}{x^2}} \right) = +\infty.$$

$\Rightarrow$ f ha minimo per th. Weierstrass generalizzato. $\square$

Esercizio

Dim. che $f(x) = x^3 + x + 1$ è biettiva su $\mathbb{R}$.

Calcolare $\lim_{y \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right)$.

Soluz. f è continua su $\mathbb{R}$

Come prima, f è strett. crescente su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ iniettiva su $\mathbb{R}$

Dim. che $\forall k \in \mathbb{R}$, $\exists\, x_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$f(x_k) = k \iff f(x_k) - k = 0.$

Sia, per k fissato, $g(x) = f(x) - k$.

g è continua su $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$.

$\Rightarrow$ Per th. zeri, $\exists\, x_k \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x_k) = 0 \iff f(x_k) = k$.

$\Rightarrow$ f è biettiva. Per th. della continuità dell'inversa, f^{-1} è continua.

$$\Rightarrow \lim_{y \to +\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}\left(\lim_{y \to +\infty} \frac{3y}{y+4}\right) = f^{-1}(3) = 1$$

$\blacksquare$

Esercizio

Sia $f(x) \sim x^2$ per $x \to 0^+$. Sia $g(x) = f(x) + x$.

a) $g(x) = o(x^2)$?

b) $g(x) = o(x)$?

c) $g(x) \sim x$?

d) $g(x) \sim x^2$?

Soluz. a) $g(x) = o(x^2) \iff \frac{g(x)}{x^2} \to 0$.

Ma $\frac{g(x)}{x^2} = \frac{f(x)+x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \to +\infty$.

b) $\frac{g(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 = \frac{f(x)}{x^2} x + 1 \to 1$.

c) Da b) segue che $g(x) \sim x$.

d) Da a) segue che $g(x) \not\sim x^2$.

Esercizio

Trova f, g t.c. $f \sim g$ per $x \to +\infty$ e

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) : \quad a) \in \mathbb{R} \quad b) = +\infty \quad c) = -\infty \quad d) \nexists$$

Soluz. a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$.

b) $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = x^2$

c) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = +x^2$

d) $f(x) = x + \sin x$, $g(x) = x$.

$\square$

Esercizio

È vero in generale che $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0 \Rightarrow f\sim g$ per $x\to+\infty$? Se invece $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$.

Soluz. Non è vero in generale!

Prendiamo $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/x^2$.

Se però $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = F \neq 0$ e $\exists \lim_{x\to+\infty} g(x) = G \neq 0$, concludiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty} f(x)}{\lim_{x\to+\infty} g(x)} = F/G.$$

$\boxed{/\!/}$