

Esercitazione Fisici 10/11/23 e Matematici 13/11/23:

Passaggi per lo studio di una funzione $f(x)$:

- 1) Dominio naturale;
- 2) Simmetrie (pari/dispari);
- 3) Segno di $f(x)$;
- 4) Limiti agli estremi del dominio e asintoti;
- 5) Continuità;
- 6) Derivabilità;
- 7) Punti critici e segno di $f'(x)$;
- 8) Convessità e derivata seconda;
- 9) Esistenza di massimo e minimo globali da ricercare tra
 - punti critici,
 - punti di non derivabilità,
 - estremi del dominio.

Esercizio 1:

Studiare la funzione $g(x) = e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$ e disegnare un grafico qualitativo di essa.

Svolgimento:

- 1) Dominio naturale: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 2) Simmetrie: il dominio è asimmetrico rispetto a 0 $\Rightarrow$ non ci possono essere simmetrie ($g(-x) = e^{\left| \frac{-x+1}{-x-1} \right|} \neq \pm g(x)$).
 $\leftarrow$ è un'esponenziale!
- 3) Segno di $g(x)$: $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ($= \text{dom}(g)$). Inoltre
 $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 1, g(x) = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = 0$
 $\Leftrightarrow x = -1$ (minimo globale).

4) Limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = e^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|} = e^- \Rightarrow \underline{e} \text{ è un asintoto orizzontale !!}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{|x+1|}{x-1}} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{|x+1|}{x-1}} = +\infty \Rightarrow \underline{1 \text{ è un asintoto verticale!}}$$

5) Continuità: g è continua sul dominio.

6) Derivabilità: Definiamo $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e lo scriviamo

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & \text{se } |x| > 1 \text{ o } x = -1, \\ e^{-f(x)} & \text{se } |x| < 1. \end{cases} \quad \leftarrow \text{Osserviamo che } g \text{ è derivabile su } \text{dom}(g) \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Ora chiamiamo $A = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ e $B = (-1, 1)$.

Su A abbiamo $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ con

$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\text{quindi } g'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{f(x)}$$

$$\text{Su B} \text{ abbiamo } g'(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{-f(x)}$$

⚠ Ma in $x = -1$ cosa succede a $g'(x)$?

Per il corollario del teorema di Lagrange

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = \frac{1}{2},$$

quindi la funzione presenta un punto angoloso in $x = -1$ ed in esso non è derivabile!

7) Punti critici e segno di $g'(x)$:

$g'(x) > 0$ su B e $g'(x) < 0$ su A, quindi g è strettamente crescente in B e strettamente decrescente in A.

Inoltre $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow \nexists$ punti critici.

8) Convessità e derivata seconda: $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$

Su A:

$$g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} ((f'(x))^2 + f''(x)) = \frac{4x}{(x-1)^4} e^{f(x)}$$

Su B:

$$g''(x) = (-e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} ((f'(x))^2 - f''(x)) = \frac{4(2-x)}{(x-1)^4} e^{-f(x)}$$

NOTA: $(f'(x))^2 = \frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow (f'(x))^2 + f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4+4x-4}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$

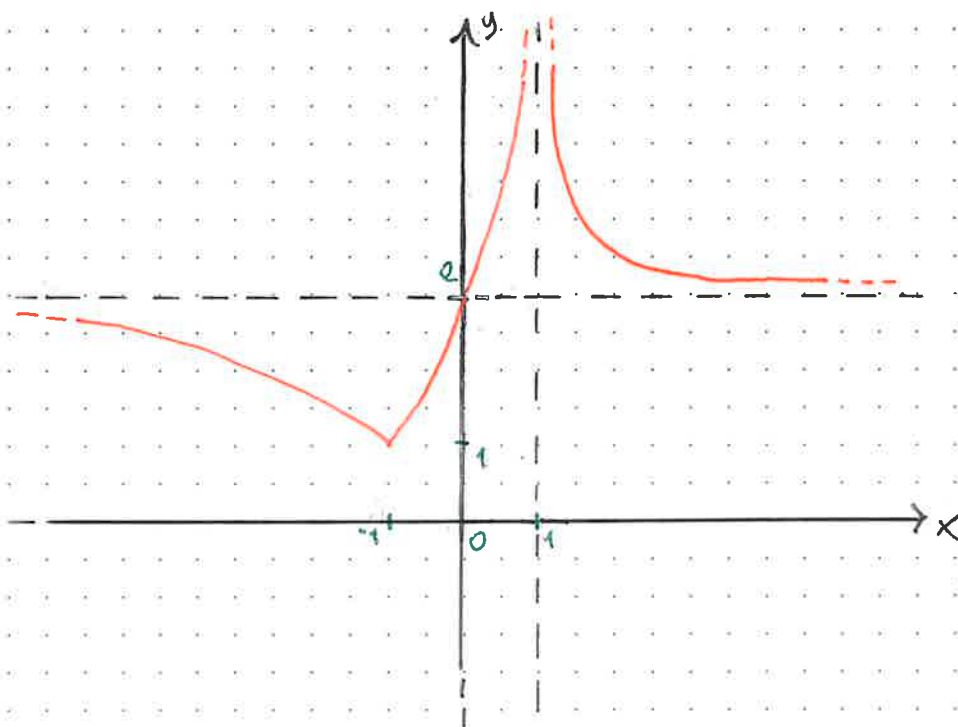
$$\text{e } (f'(x))^2 - f''(x) = \frac{4}{(x-1)^4} - \frac{4}{(x-1)^3} = \frac{4-4x+4}{(x-1)^4} = \frac{8-4x}{(x-1)^4} = 4 \cdot \frac{2-x}{(x-1)^4}$$

Quindi otteniamo che su A la funzione è concava per $x < -1$ e convessa per $x > -1$, su B è sempre convessa.

9) $\exists$ max e min globali:

Da punto 3) abbiamo un minimo globale in $x = -1$, mentre non abbiamo massimi globali:

$$\inf_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} g = \min_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} g = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} g = +\infty, \quad \nexists \max_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} g.$$



Extra:

Consideriamo $g|_{(1, +\infty)} : (1, +\infty) \rightarrow (e, +\infty)$. Su di essa possiamo

dire che è monotona (strettamente decrescente, vedi punto 7)) e continua (vedi punto 5)) $\Rightarrow$ è iniettiva. Inoltre, è suriettiva poiché $\text{codom}(g|_{(1, +\infty)}) = \text{imm}(g|_{(1, +\infty)})$. Di conseguenza

$$\exists g^{-1} : (e, +\infty) \rightarrow (1, +\infty).$$

Calcoliamo ora il valore di $(g^{-1})'(e^3)$.

Applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa per cui si ha (siccome $g^{-1}(e^3) = 2$)

$$(g^{-1})'(e^3) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2e^3} = -\frac{e^{-3}}{2}.$$

Esercizio 2:

Sia $g_\alpha(x) = |x-1|e^{-\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Tracciare un grafico qualitativo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui $x_0=0$ è un punto di massimo globale in $[0, +\infty)$.

Svolgimento:

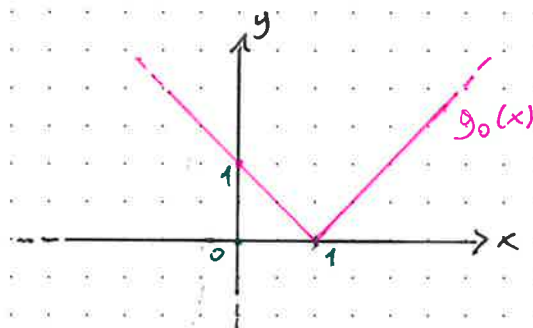
a) $\text{Dom}(g_\alpha) = \mathbb{R}$, g_α è continua su tutto $\mathbb{R}$. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $g_\alpha(x) \geq 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

• $\alpha = 0$: $g_0(x) = |x-1|$

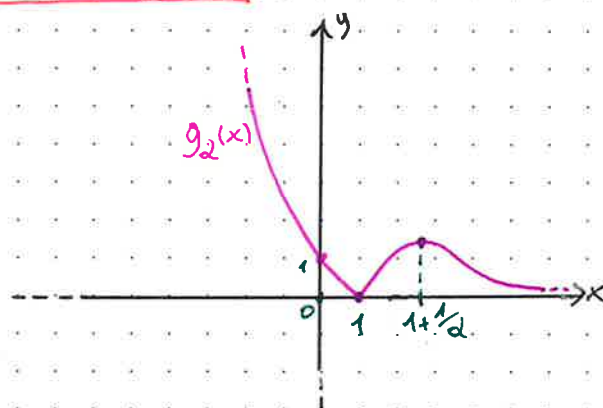
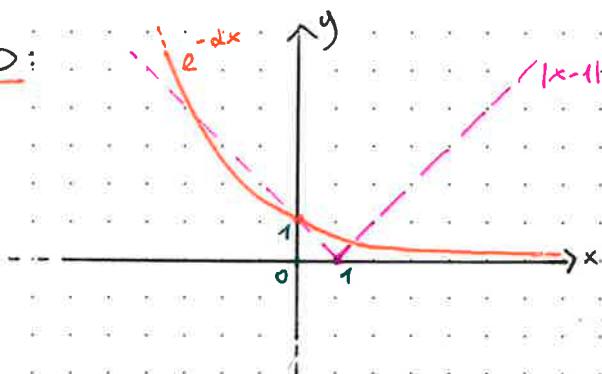
g_0 è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$,
 non è derivabile in $x=1$.

$$\sup_{\mathbb{R}} g_0 = +\infty,$$

$\inf_{\mathbb{R}} g_0 = \min_{\mathbb{R}} g_0 = 0 \Rightarrow x=1$ è punto di minimo assoluto!

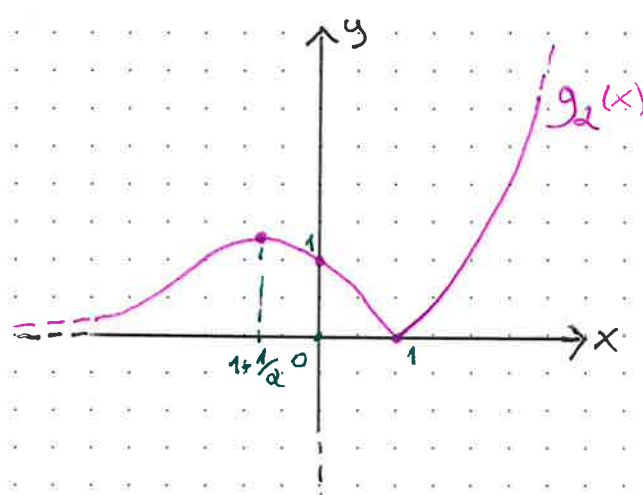
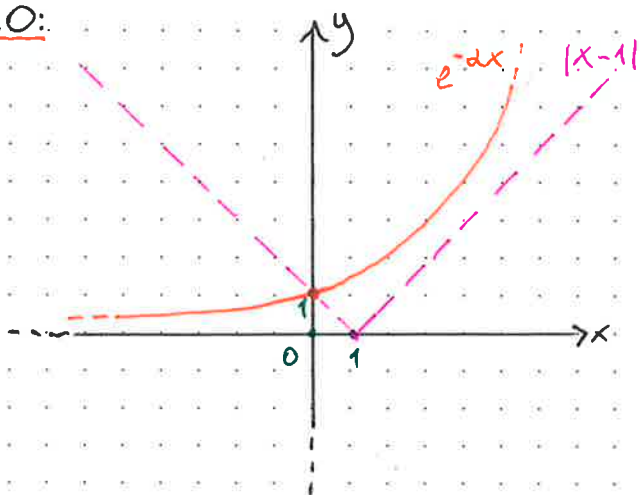


• $\alpha > 0$:



Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{e^{\alpha x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1|e^{\alpha x} = +\infty$.

• $\alpha < 0$:



Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-\alpha x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{-\alpha x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{\alpha x}} = 0$

b) Affinché $x_0 = 0$ sia un punto di massimo globale in $(0, +\infty)$ notiamo che $\alpha > 0$ (se $\alpha \leq 0$, $\sup_{(0, +\infty)} g_\alpha = +\infty$, quindi $\nexists \max_{(0, +\infty)}$).

Inoltre dal grafico per $\alpha > 0$ possiamo dedurre la seconda condizione: $g_\alpha(0) \geq g_\alpha(1 + \frac{1}{\alpha})$. Quindi

$$\begin{cases} \alpha > 0, \\ g_\alpha(0) \geq g_\alpha(1 + \frac{1}{\alpha}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0, \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1} \leq 1. \end{cases}$$

Studiamo la seconda disuguaglianza:

$$\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1} \leq 1 \Rightarrow \alpha e^{\alpha+1} \geq 1.$$

Questa disuguaglianza non può essere risolta analiticamente, si può usare un metodo numerico (e.g. il metodo di bisezione).

Di conseguenza definiamo $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ come la soluzione di $\alpha e^{\alpha+1} = 1$. Notiamo che la funzione $\alpha e^{\alpha+1} \nearrow$ per $\alpha > 0$.

Quindi possiamo dire che $x_0 = 0$ è un punto di massimo globale in $(0, +\infty)$ per $g_\alpha(x) \forall \alpha \geq \bar{\alpha} > 0$.

NOTA: Il fatto che si abbia un massimo locale in $x = 1 + \frac{1}{\alpha}$ si ottiene dallo studio della derivata prima (ricerca punti critici + crescita/decrecita funzione). Ciò è vero sia per $\alpha < 0$ che per $\alpha > 0$, ma ovviamente non per $\alpha = 0$. Invece $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha sempre un punto di minimo globale in $x = 1$, anche se $x = 1$ non è un punto critico della derivata prima di $g_\alpha(x)$. Infatti $g_\alpha(x)$ non è mai derivabile in $x = 1$ qualsiasi sia $\alpha \in \mathbb{R}$.

Provate da soli a calcolare e studiare $g'_\alpha(x)$ e $g''_\alpha(x)$. Inoltre dimostrate perché $g_\alpha(x)$ non è derivabile in $x = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3:

Sia $f(x) = \sqrt{|x^3| + 3x + 2}$.

a) Studiare la derivabilità di f ;

b) Tracciare il grafico qualitativo di f .

Svolgimento:

a) $f(x) = h \circ g(x)$ con $h(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = |x^3| + 3x + 2$.

i) Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$? (Dominio naturale di f)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, possiamo riscriverla come

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 2 & x \geq 0, \\ -x^3 + 3x + 2 & x < 0. \end{cases}$$

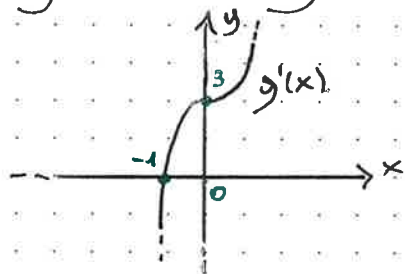
g è derivabile in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ma in $x=0$?

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & x > 0, \\ -3x^2 + 3 & x < 0. \end{cases}$$

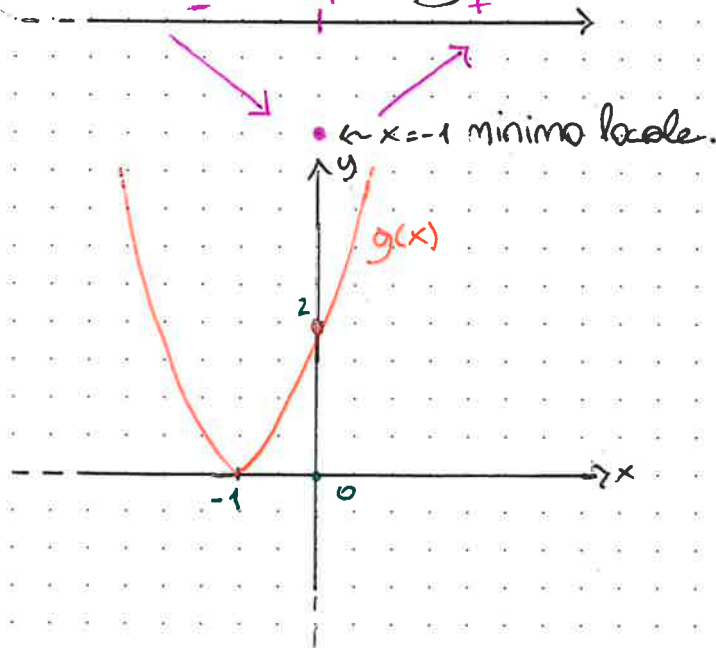
NOTA: $g(x) = |x^3| + 3x + 2$, $|x^3| \sim 0(x)$ per $x \rightarrow 0 \Rightarrow g(x) \sim 3x + 2$ per $x \rightarrow 0$. ← derivabile in 0.

Per il corollario del teorema di Lagrange $g'_+(0) = 3 = g'_-(0)$

$\Rightarrow \exists g'(0) = 3$ (g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$).



$g'(x) > 0$ per $x > -1 \Rightarrow g$ crescente,
 $g'(x) < 0$ per $x < -1 \Rightarrow g$ decrescente.



$$g(x) = |x^3| + 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty,$$

$x = -1$ è quindi minimo globale,

$$g(-1) = 0 \Rightarrow \underline{g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

ii) Derivabilità di $f(x) = \sqrt{|x^3| + 3x + 2}$:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ da i), f è continua e derivabile in tutto $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, ma in $x = -1$?

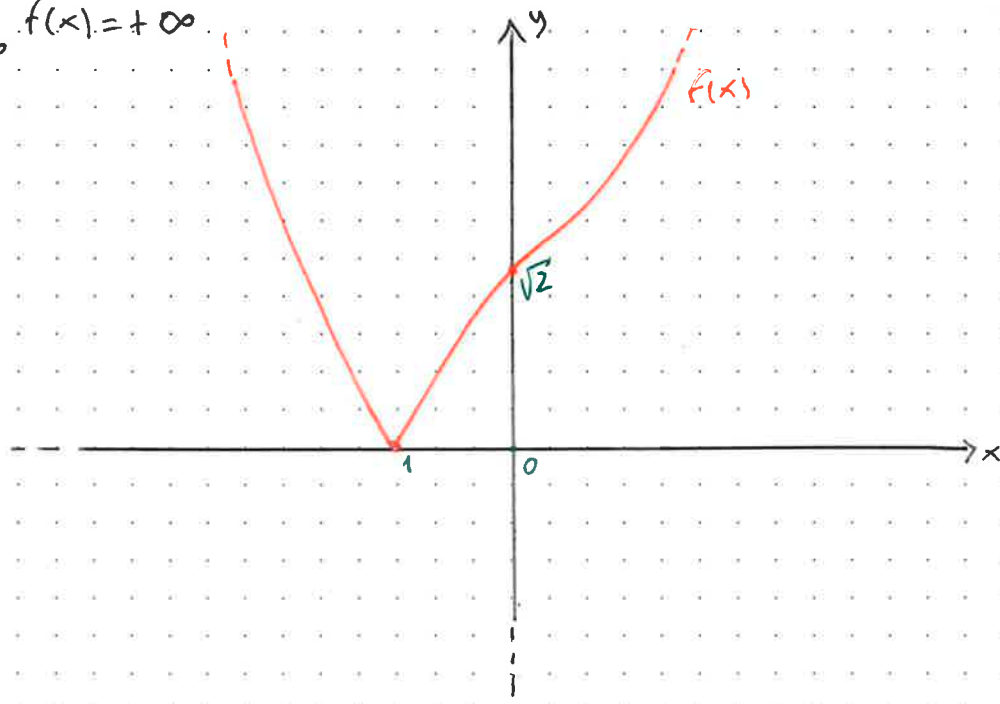
$$g(x) = -x^3 + 3x + 2 = (x+1)^2(2-x) \text{ per } x < 0.$$

Quindi in un intorno di $x = -1$:

$$f(x) = \sqrt{-x^3 + 3x + 2} = \sqrt{(x+1)^2(2-x)} = |x+1|\sqrt{2-x} \sim \sqrt{3}|x+1|.$$

$\sqrt{3}|x+1|$ non è derivabile in $x = -1 \Rightarrow$ neanche f lo è.

6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$



Teorema di de L'Hôpital:

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili, inoltre $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $x_0 \in [a, b]$

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$),

ii) $g'(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$,

iii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $g(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$.

Esercizio 4:

Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^3(x) - 1}{\log(1+2x) \cosh(x^3)} \quad \left[\frac{0}{0} \right],$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log(x)} \quad \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right].$$

Svolgimento:

$$a) f(x) = \cos^3(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = -3 \cos^2(x) \sin(x),$$

$$g(x) = \log(1+2x) \cosh(x^3) \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{1+2x} \cosh(x^3) + 3 \log(1+2x) \sinh(x^3) x^2.$$

Verifichiamo le ipotesi di de L'Hôpital:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^r$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0^r$, $g'(0) = 2 > 0$ e g' è continua in un intorno di $g' \Rightarrow$ per il teo. di permanenza del segno $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c.

ii) $g'(x) > 0 \forall x \in (0, \alpha)^r$.

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-3 \cos^2(x) \sin(x)}{\frac{2}{1+2x} \cosh(x^3) + 3 \log(1+2x) \sinh(x^3) x^2} = 0 \in \overline{\mathbb{R}} \stackrel{D}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$b) f(x) = \log(\log(x+1)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\log(x+1)(x+1)},$$

$g(x) = \log(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$, f e g verificano i) e ii), vediamo iii):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x+1) \log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(x+1)} \quad \left[\frac{0}{0} \right]^x.$$

Δ Proviamo ad applicare nuovamente de L'Hôpital:

$$h(x) = x \Rightarrow h'(x) = 1 \quad \text{e} \quad l(x) = \log(x+1) \Rightarrow l'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad l'(0) = 1.$$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} l(x)^r$, ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c. $l'(x) > 0 \forall x \in (0, \alpha)^r$.

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h'(x)}{l'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+1 = 1 \in \overline{\mathbb{R}} \stackrel{D}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \stackrel{D}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$