

Esercitazione Fisica 01/12/2023:

Esercizio 1:

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile su $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}([a, b])$) e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$.

Dimostrare che $g \in \mathcal{R}([a, b])$ e che $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

NOTA TEORICA:

Definizione (di integrale secondo Riemann):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile secondo Riemann (o Riemann integrabile) se

$$\sup S_n = \inf \underline{S}_n.$$

E' detto integrale di Riemann di f $\int_a^b f(x) dx = \sup S_n = \inf \underline{S}_n$.

Remark (lineariet  dell'integrale):

$f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vale la seguente propriet :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Solgimento:

Consideriamo la funzione $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cos  costruita

$$h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0, \\ f(x_0) - g(x_0) & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

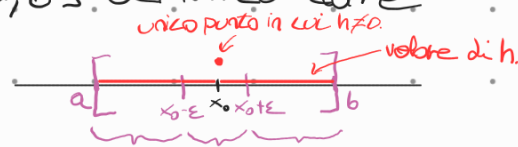
Ora ci basta dimostrare:

- 1) $h \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow g(x) = f(x) - h(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ per linearit ;
- 2) $\int_a^b h(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ sempre per linearit .

1) TESI: $h \in \mathcal{R}([a, b])$.

$\forall \varepsilon > 0$ sia D_ε la partizione di $[a, b]$ definita come

$$D_\varepsilon := \{x_1 = a, x_2 = x_0 - \varepsilon, x_3 = x_0 + \varepsilon, x_4 = b\}.$$



$$\begin{aligned} s(D_\varepsilon, h) &= \sum_{i=1}^3 \inf_{[x_i, x_{i+1}]} h(x) \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0 + \inf_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} h(x) \cdot 2\varepsilon + 0 \\ &= \inf_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} h(x) \cdot 2\varepsilon \leq 0, \end{aligned}$$

$$S(D_\varepsilon, h) = \sup_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} h(x) \cdot 2\varepsilon \geq 0.$$

Per ogni partizione D più fine di D_ε ($D_\varepsilon \subset D$) vale

$$s(D_\varepsilon, h) \leq s(D, h) \text{ e } S(D, h) \leq S(D_\varepsilon, h).$$

Quindi

$$0 = \sup_{\varepsilon > 0} s(D_\varepsilon, h) \leq \sup_D s(D, h) \leq \inf_D S(D, h) \leq \inf_{\varepsilon > 0} S(D_\varepsilon, h) = 0.$$

In particolare ne consegue che

$$\sup_D s(D, h) = \inf_D S(D, h) = 0,$$

cioè abbiamo dimostrato

$$1) h \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow g \in \mathcal{R}([a, b])$$

e

$$2) \int_a^b h(x) dx = \inf_D S(D, h) = \sup_D s(D, h) = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

NOTA:

Equivalentemente si può dimostrare che $h \in \mathcal{R}([a, b])$ con

la caratterizzazione: $\forall \varepsilon > 0$ $S(D_\varepsilon, h) - s(D_\varepsilon, h) < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$ prendiamo la partizione $D_\varepsilon := \{x_1 = a, x_2 = x_0 - \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|}, x_3 = x_0 + \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|}, x_4 = b\}$.

$$S(D_\varepsilon, h) = \sup_{[x_2, x_3]} h(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} \text{ e } s(D_\varepsilon, h) = \inf_{[x_2, x_3]} h(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S(D_\varepsilon, h) - s(D_\varepsilon, h) &= \left(\sup_{[x_2, x_3]} h(x) - \inf_{[x_2, x_3]} h(x) \right) \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} = (|h(x_0)| - 0) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Esercizio 2:

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Dimostrare che se $\int_a^b f(x) dx = 0$, allora $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Suddivisione:

Procediamo per assurdo: $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \neq 0$.
contronominale

$\exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x_0) > 0$ ($f(x) \geq 0$ per hp.).

Per il teorema di permanenza del segno

$\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. (*)

Inoltre $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, x_0 - \varepsilon]), \mathcal{R}([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]), \mathcal{R}([x_0 + \varepsilon, b])$,

cioè

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx.$$

Studiamo $\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx$:

$$\int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx \geq \inf_{[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} f(x) \cdot 2\varepsilon > 0.$$

$f(x) > 0$ per $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ (*).

Quindi otteniamo

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx > 0 \Rightarrow \text{ASSURDO (per hp. } \int_a^b f(x) dx = 0).$$

Esercizio 3:

Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione $g(x) = \int_{x^3}^{-x^2} e^{-t^2} dt$.

Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Remark:

$f \in C^0([a, b])$, $\alpha(x), \beta(x): I \rightarrow [a, b]$ derivabili, allora

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x)) \beta'(x) - f(\alpha(x)) \alpha'(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Svolgimento:

i) Vogliamo sviluppare $g(x)$ come $g(x) = g(0) + g'(0)x + g''(0) \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$.

Il primo termine è facile da calcolare, ovvero

$$g(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0.$$

Per calcolare gli altri definiamo $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, da cui otteniamo

$$g(x) = \int_{x^3}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = - \int_0^{x^3} e^{-t^2} dt + \int_0^{-x^2} e^{-t^2} dt = f(-x^2) - f(x^3).$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

e^{-t^2} continua $\stackrel{\text{TFC}}{\Rightarrow} f$ derivabile su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow g(x)$ derivabile,
($x \mapsto -x^2, x \mapsto x^3$ derivabili)

in particolare otteniamo

$$g'(x) = f'(-x^2) \cdot (-2x) - f'(x^3) \cdot (3x^2) = -2x e^{-x^4} - 3x^2 e^{-x^6}$$

$$\Rightarrow g'(0) = 0$$

e

$$g''(x) = -2e^{-x^4} + 8x^4 e^{-x^4} - 6x e^{-x^6} + 18x^7 e^{-x^6}$$

$$\Rightarrow g''(0) = -2.$$

Infine si ottiene per $x \rightarrow 0$

$$g(x) = 0 + 0 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2).$$

ii) Usiamo lo sviluppo di Taylor ottenuto in i) per il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 2, \\ 1 & \alpha = 2, \\ -\infty & \alpha > 2. \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$ sse $\alpha < 2$.

Esercizio 4:

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \int_0^{x^2} \cos(2t) dt$. Determinare

i) i punti critici di g ;

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$.

Soluzioni:

i) $\cos(2t)$ continua su $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ derivabile su $\mathbb{R} \Rightarrow g(x)$ derivabile su $\mathbb{R}$.

Sia $f(x) = \int_0^x \cos(2t) dt$, allora $g(x) = f(x^2)$ e quindi avremo che

$$g'(x) = f'(x^2) (2x) = 2x \cos(2x^2).$$

x punto critico sse $g'(x) = 0$ sse $2x \cos(2x^2) = 0$:

$$x = 0 \vee \cos(2x^2) = 0 \text{ sse } x = 0 \vee 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sse } x = 0 \vee$$

$$x^2 = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ sse } x = 0 \vee x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}}, k \in \mathbb{Z} \text{ sse}$$

$$x = 0 \vee x = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1+2k}, k \in \mathbb{N}.$$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6}$ $\left[\frac{0}{0} \right]$, usiamo de l'Hopital (dato che siamo nelle ipotesi e abbiamo $g'(x)$).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x^2}{x^6} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x) - 2x}{6x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos(2x^2) - 2x}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x^2) - 1}{2x^4} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$\downarrow$ *serie notevole*
-1

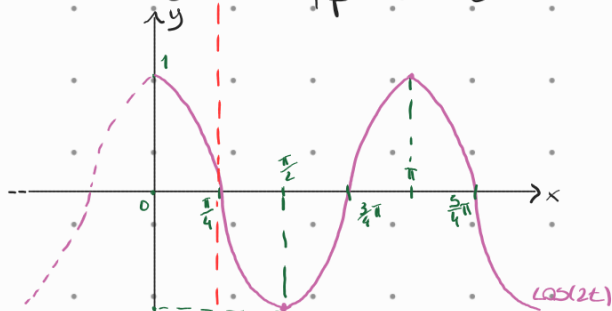
Esercizio 5:

Studiare qualitativamente

$$F(x) = \int_{\pi/4}^x \cos(2t) dt. \leftarrow F(x) \text{ è funzione integrale!}$$

Svolgimento:

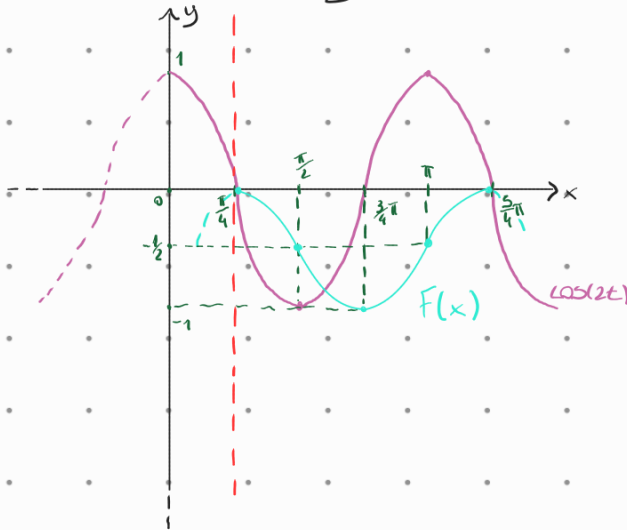
Cominciamo rappresentando $\cos(2t)$:



Osserviamo che $F(x)$ ha uno zero in $\frac{\pi}{4}$ ed è di periodo π (avrà un altro zero in $\frac{5}{4}\pi$).

Inoltre tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ l'area aumenta, ma essendo al di sotto dell'asse delle x $\cos(2t)$ sarà negativo (la funzione integrale è decrescente e concava). Tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$ l'area diminuisce e $\cos(2t)$ sarà sempre negativo (F decrescente e convessa). Analogamente, tra $\frac{3}{4}\pi$ e π l'area aumenta sopra l'asse delle x , quindi $\cos(2t)$ sarà positivo (F crescente e convessa). Infine tra π e $\frac{5}{4}\pi$ l'area diminuisce e $\cos(2t)$ sarà positivo (F crescente e concava). Così conosciamo F su $[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi]$.

Siccome F è π -periodica, per periodicità possiamo disegnare F su tutto $\mathbb{R}$.

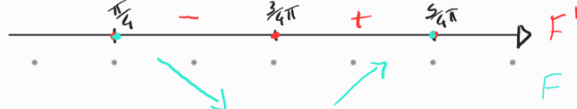


Ora controlliamo di aver fatto bene:

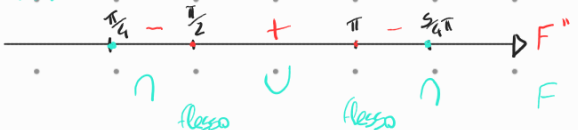
si estende su tutto $\mathbb{R}$ per periodicità del coseno.

$$F'(x) = \cos(2x) \Rightarrow F \text{ periodo } \pi \Rightarrow \text{lo studiamo su } [\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi]$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$



$$F''(x) = -2\sin(2x) \Rightarrow F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi$$



Lo studio della derivata prima e seconda di F consolida il grafico qualitativo di F precedentemente disegnato.

Esercizio 6:

Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

a) $\int \frac{3-4x}{1+x^2} dx$, b) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx$, c) $\int \sqrt[3]{2x+1} dx$, d) $\int 6x \sin(-3x^2-2) dx$, e) $\int 3x e^{x^2} dx$.

Svolgimento:

$$a) \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx = 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int \frac{x}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + C - 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= 3 \arctan x - 2 \log(1+x^2) + C.$$

$$b) \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx = \int \frac{1}{x} \arcsin'(\log(x)) dx = \int (\arcsin(\log(x)))' dx = \arcsin(\log(x)) + C.$$

$$c) \int \sqrt[3]{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8}{3} (2x+1)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8} \int ((2x+1)^{\frac{4}{3}})' dx$$
$$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{(2x+1)^4} + C.$$

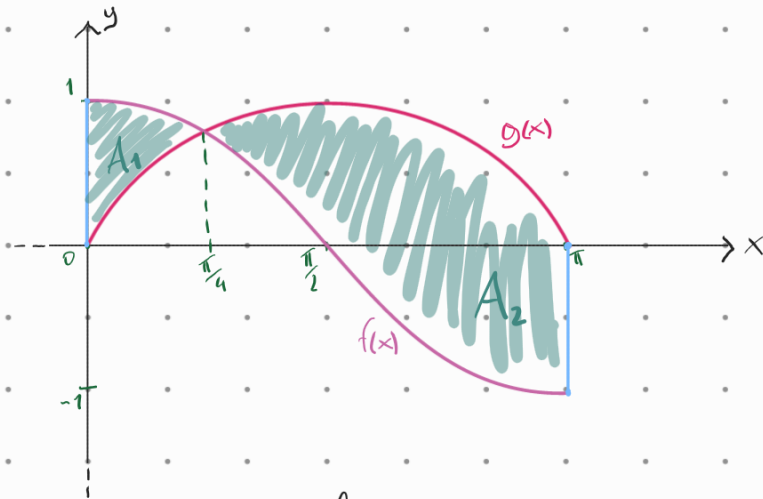
$$d) \int 6x \sin(-3x^2-2) dx = \int (-6x)(-\sin(-3x^2-2)) dx = \cos(-3x^2-2) + C.$$

$$e) \int 3x e^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + C.$$

Esercizio 7:

Calcolare l'area compresa tra i grafici di $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ e le rette $x=0$ e $x=\pi$.

Svolgimento:



il resto non ci interessa (abbiamo studiato l'area tra le
rette $x=0$ e $x=\pi$).

Notiamo che su $[0, \pi]$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Inoltre $f(x) \geq g(x) \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ e $f(x) \leq g(x) \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$.

Allora vale che

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\pi/4} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (g(x) - f(x)) dx.$$

Osserviamo che $\int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C$.

Quindi per il teorema di Torricelli-Barrow

$$A = A_1 + A_2 = [\cos x + \sin x]_0^{\pi/4} - [\cos x + \sin x]_{\pi/4}^0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 8:

Calcolare i seguenti integrali definiti (e uno indefinito)

a) $\int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx$:

SOSTITUZIONE: $\sqrt[3]{x} = s \Rightarrow x = s^3$ e $dx = 3s^2 ds$,
 $x_0 = 1 \Rightarrow s_0 = \sqrt[3]{1} = 1$ e $x_1 = 2 \Rightarrow s_1 = \sqrt[3]{2}$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{s^3 + 2s}{s^6} 3s^2 ds = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{3}{s} + \frac{6}{s^3} \right) ds \\ &= \left[3 \log |s| - \frac{3}{s^2} \right]_1^{\sqrt[3]{2}} = 3 \log \sqrt[3]{2} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 3 \end{aligned}$$

$\log 2$

In alternativa

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x + 2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} + 2x^{(\frac{1}{3}-2)} dx = \log 2 + \int_1^2 2x^{-\frac{5}{3}} dx \\ &= \log 2 + \left[-3x^{-\frac{2}{3}} \right]_1^2 = \log 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 3. \end{aligned}$$

MORALE: prima di sostituire cercare se ci sono soluzioni più immediate!

b) $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx$:

SOSTITUZIONE: $\sqrt{x} = s \Rightarrow x = s^2$ e $dx = 2s ds$,
 $x_0 = 9 \Rightarrow s_0 = \sqrt{9} = 3$ e $x_1 = 16 \Rightarrow s_1 = \sqrt{16} = 4$.

$$\begin{aligned} \int_9^{16} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 3\sqrt{x} + 2} dx &= \int_3^4 \frac{s - 3}{s^2 - 3s + 2} 2s ds = 2 \int_3^4 \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2 - 3s + 2} ds \\ &= 2 \int_3^4 1 ds - 4 \int_3^4 \frac{1}{s^2 - 3s + 2} ds = 2 - 4 \int_3^4 \frac{1}{s^2 - 3s + 2} ds. \end{aligned}$$

integrale razionale (deg 0/deg 1)

OSSERVAZIONE: $s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$.

RAZIONALIZZAZIONE: $A, B \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}$:

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{As - 2A + Bs - B}{(s-1)(s-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$-4 \int_3^4 \frac{1}{s^2 - 3s + 2} ds = +4 \int_3^4 \frac{1}{s-1} - 4 \int_3^4 \frac{1}{s-2} = 4 [\log|s-1|]_3^4 - 4 [\log|s-2|]_3^4$$

$$= 4 \log 3 - 4 \log 2 - 4 \log 2 = 4 \log \frac{3}{4}.$$

Infine otteniamo che

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{s^2 - 3\sqrt{x} + 2} dx = 2 + 4 \log \frac{3}{4}.$$

c) $\int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4+x^2}} dx :$

SOSTITUZIONE: $x = 2 \sinh(s) = e^s - e^{-s}$ e $dx = 2 \cosh(s)$,

$$x_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow s_1 = 1.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4+x^2}} dx &= \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4+4 \sinh^2(s)}} 2 \cosh(s) ds \stackrel{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}{=} 2 \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4 \cosh^2(s)}} \cosh(s) ds \\ &= 4 \int_0^1 \cosh^2(s) ds \end{aligned}$$

INTEGRALE PER PARTI:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \Rightarrow 4 \cosh(s) \sinh(s) \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 \sinh^2(s) ds$$

$$= 4 \cosh(s) \sinh(s) \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 (\cosh^2(s) - 1) ds$$

$$= 4 \cosh(s) \sinh(s) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 ds - 4 \int_0^1 \cosh^2(s) ds$$

Quindi otteniamo che $\int_0^1 \cosh^2(s) ds = \frac{1}{2} \cosh(s) \sinh(s) \Big|_0^1 + \frac{s}{2} \Big|_0^1$,

di conseguenza

$$\int_0^{2+\frac{1}{2}} \sqrt{4+x^2} dx = 2 \cosh(s) \sinh(s) \Big|_0^1 + 2s \Big|_0^1 \\ = 2 \cosh(1) \sinh(1) + 2 \approx 5.6269.$$

d) $\int \frac{1}{\sin x + 1} dx :$

SOSTITUZIONE: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow x = 2 \arctan(t)$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

OSSERVAZIONE:

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = \frac{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2}) (\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}))} = 2 \cos(\frac{x}{2}) \sin(\frac{x}{2}) = \sin(x).$$

NB. Ci sono formule equivalenti per il coseno.

$$\int \frac{1}{\sin x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{\cancel{1+t^2}}{t^2 + 2t + 1} \cdot \frac{1}{\cancel{1+t^2}} dt \\ = 2 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{(1+t)} + C = -\frac{2}{1+2\tan(\frac{x}{2})} + C.$$