

Esercizio 1:

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} dx.$$

Svolgimento:

$f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$, $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente positiva.

In 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} = 0 \Rightarrow f \text{ è estendibile con continuità in } 0 \Rightarrow \text{non è un integrale improprio!}$$

In 1:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ studiamo la convergenza!

Per $x \rightarrow 1^-$ $f(x) \sim \frac{\sin 1}{\sqrt{1-x}}$ e $0 < \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/4}} < \frac{1}{(1-x)^{1/4}}$.

NOTA: $\int_0^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Quindi $\alpha = 1/4 < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/4}} dx$ converge,

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/4}} dx$ converge per il thm. del confronto,

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} dx$ converge per il thm. del confronto asintotico.

Dunque $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} dx$ è convergente.

Esercizio 2:

- a) Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}} dx$ converge;
- b) Calcolare, usando la definizione, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx$.

Svilgimento:

a) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}}$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e > 0 .

In 0:

$f(x) \sim \frac{1}{4x^\alpha}$, per il teorema del confronto asintotico

(in 0) converge sse $\alpha < 1$.

A $+\infty$:

$f(x) \sim \frac{1}{9^{\beta+1} x^{\alpha+\beta+1}}$, per il teorema del confronto asintotico

converge sse $\alpha + \beta + 1 > 1$ sse $\alpha > -\beta$ ($\alpha + \infty$).

α, β devono quindi soddisfare $\begin{cases} \alpha > -\beta \\ \alpha < 1 \end{cases}$, ovvero $-\beta < \alpha < 1$.

- b) In questo caso $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge, perciò

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \end{aligned}$$

Primitiva di f :

$\sqrt{x} = s, x = s^2 \Rightarrow dx = 2s ds$ $\frac{3}{2}s = t, s = \frac{2}{3}t \Rightarrow ds = \frac{2}{3}dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int \frac{1}{s(4+9s^2)} 2s ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{3}{2}s)^2} ds = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{3} \arctan(t) + C = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}s\right) + C = \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) + C. \end{aligned}$$

Quindi

$\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\right) + 0$ $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) \right]_\varepsilon^1 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) \right]_1^M = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 3:

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} dx.$$

Svolgimento:

$f: (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente positiva

$$(f(x) = \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}}).$$

Per $x \rightarrow 1^+$:

$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ per $t \rightarrow 0^+$, quindi per $x \rightarrow 1^+$

$$1 - \cos(x-1) = \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

$$f(x) \sim \frac{\frac{(x-1)^2}{2}}{\underbrace{(x-1)^\alpha (x+1)^\alpha}_{(x^2-1)^\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^\alpha (x-1)^{\alpha+2}} \text{ per } x \rightarrow 1^+, \text{ quindi}$$

converge se $\alpha+2 < 1 \Rightarrow \alpha < -1$.

Per $x \rightarrow 2^-$:

$$f(x) \sim \frac{1 - \cos 1}{3^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} \text{ per } x \rightarrow 2^-, \text{ quindi converge se}$$

$$3-\alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 2.$$

L'integrale $\int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} dx$ converge per $\begin{cases} \alpha < -1 \\ \alpha > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{nessun } \alpha \in \mathbb{R}.$

Esercizio 4:

Sia $f(s) = \frac{e^{-|s|} - 1}{s(s+1)}$.

- Studiare dominio, segno e derivata prima;
- Tracciare grafico qualitativo;
- Determinare dominio di $F(x) = \int_0^x f(t) dt$;
- Tracciare grafico di $F(x)$.

Svolgimento:

- a) Osserviamo che dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Studiamo il segno:

- $e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (= 0 \text{ sse } s = 0);$ ← non può esserci $f(0)$, $0 \notin \text{Dom}(f)$.
- $s(s+1) > 0 \text{ sse } s < -1 \vee s > 0$
 $\Rightarrow f(s) > 0 \text{ sse } s \in (-1, 0).$

Studiamo i limiti di f :

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = -\infty, \quad \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = +\infty,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} = -1.$$

Studiamo $f'(s)$:

$s > 0$:

$$f'(s) = \frac{(-e^{-s})(s(s+1)) - (e^{-s} - 1)(2s+1)}{s^2(s+1)^2} = \frac{-e^{-s}s^2 - e^{-s}s - e^{-s}2s - e^{-s} + 2s + 1}{s^2(s+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{-s}(s+1)^2 - e^{-s}s + 2s + 1}{s^2(s+1)^2} > 0$$

(si deve studiare bene il numeratore per arrivare a questa conclusione. I calcoli non sono facili).

$s < 0$:

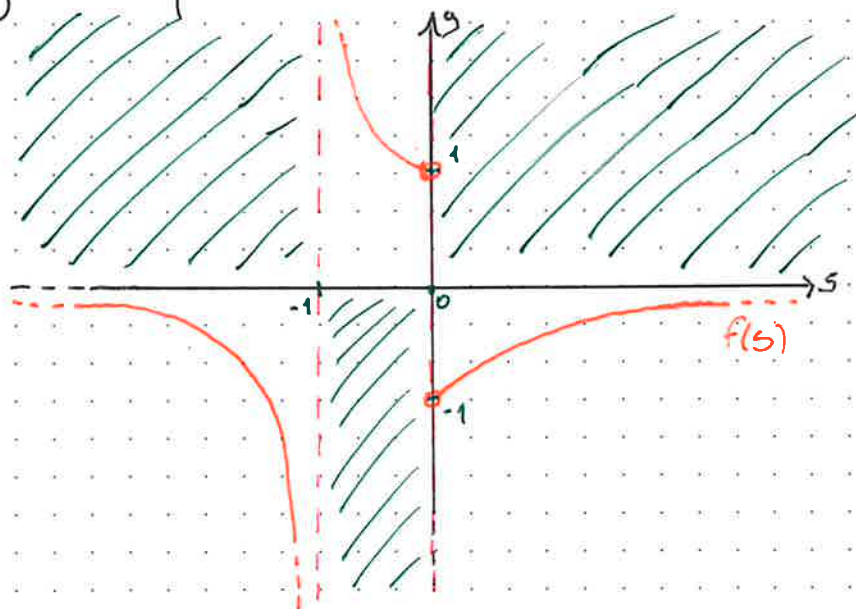
$$f'(s) = \frac{(e^s)(s(s+1)) - (e^s - 1)(2s+1)}{s^2(s+1)^2} = \dots < 0$$

$$\nexists s \in \mathbb{R} \text{ t. c. } f'(s) = 0.$$

Quindi

$$f(s) \nearrow \text{ per } s > 0 \quad \text{e} \quad f(s) \searrow \text{ per } s < 0.$$

b) Disegniamo qualitativamente $f(s)$:



c) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $\text{dom } F$?

Su $[0, +\infty)$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$, allora $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$ è un integrale proprio.

f continua su $(0, \alpha]$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow f \in \mathcal{R}([0, \alpha])$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow \underline{[0, +\infty) \subseteq \text{dom } F}$.

Su $(-1, 0)$: analogamente a prima (f continua su $(\alpha, 0)$)

$\forall \alpha \in (-1, 0) \Rightarrow f \in \mathcal{R}([\alpha, 0])$ $\forall \alpha \in (-1, 0) \Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in (-1, 0)$

$\Rightarrow \underline{(-1, 0) \subseteq \text{dom } F}$.

In $x = -1$: studiamo la convergenza di $\int_0^{-1} f(t) dt$:

$$\int_0^{-1} f(t) dt = - \int_{-1}^0 \frac{e^t - 1}{t(t+1)} dt \quad \Rightarrow \text{per } t \rightarrow -1^+ \quad \frac{e^t - 1}{t(t+1)} \sim (1 - e^{-1}) \frac{1}{t+1}$$

e sappiamo che $\int_{-1}^0 \frac{1}{t+1}$ non converge.

Quindi per il teorema del confronto asintotico

$\int_0^{-1} f(t) dt$ non converge $\Rightarrow \underline{-1 \notin \text{dom } F}$.

Di conseguenza $(-\infty, -1) \notin \text{dom } F$.

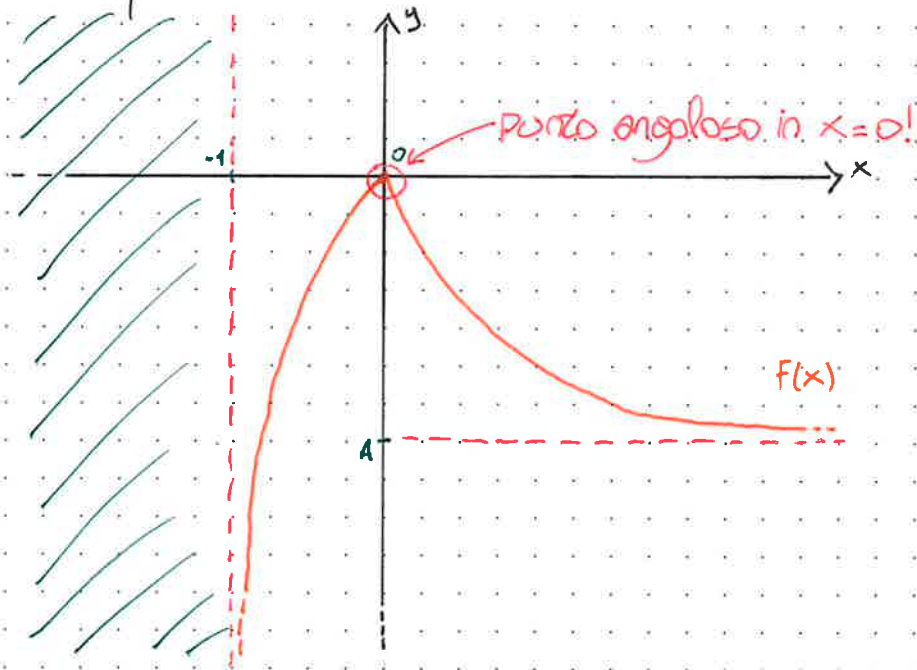
Quindi $\text{dom } F = (-1, +\infty)$.

Inoltre $a = +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t(t+1)} dt \Rightarrow \text{per } t \rightarrow +\infty \quad \frac{e^{-t} - 1}{t(t+1)} \sim -\frac{1}{t^2}, \quad \leftarrow \text{converge}$$

quindi per il teorema del confronto asintotico converge
 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt = \underline{A \in \mathbb{R}}$.

d). Disegniamo qualitativamente $F(x)$:



Funzioni Convesse:

Esercizio 1 (una caratterizzazione della convessità):

Dimostrare che una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se e solo se $\forall x_1, x_2 \in [a, b] \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ vale che

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

NOTA: vale anche per funzioni concave con il $\geq$.

Dimostrazione:

($\Rightarrow$):

Prendiamo $x \in [x_1, x_2]$, possiamo riscrivere x come

$$x = x_2 - \lambda(x_2 - x_1) \text{ per qualche } \lambda \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned} &= \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leftarrow \text{combinazione convessa di } x_1 \text{ e } x_2. \end{aligned}$$

Per la definizione di convessità otteniamo

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1) \\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (1-\lambda)(x_2 - x_1) \\ &= f(x_1) + f(x_2) - f(x_1) - \lambda f(x_2) + \lambda f(x_1) \\ &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

□

($\Leftarrow$):

Prendiamo $x \in [x_1, x_2]$ ($x_1 < x < x_2$). Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2 \\ &\quad \begin{matrix} \in [0, 1] \end{matrix} \quad \begin{matrix} = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in [0, 1] \end{matrix} \end{aligned}$$

Dunque la nostra ipotesi applicata a x_1, x_2 e $\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ implica

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \stackrel{?}{=} f(x_1) \\ &= f(x_1) \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} - 1 \right) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + f(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(x_1) \left(\frac{x_2 - x_1 - x_2 + x_1}{x_2 - x_1} \right) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) + f(x_1) \\
 &= f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)) \\
 &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1).
 \end{aligned}$$

□

□

Esempio:

Provare che $f(x) = x^2$ ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) è strettamente convessa.

NOTA: strettamente convessa (concava) vuol dire disuguaglianza stretta, cioè $< (>)$.

Svolgimento:

Vogliamo provare che $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} (x_1 \neq x_2), \forall \lambda \in (0, 1)$.

$$? \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \stackrel{?}{<} \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Quindi

$$\lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + \underbrace{(1-\lambda)^2 x_2^2} \stackrel{?}{<} \underbrace{\lambda x_1^2} + \underbrace{(1-\lambda)x_2^2}$$

$$\lambda(\lambda-1)x_1^2 + (1-\lambda)(\lambda-1)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 \stackrel{?}{<} 0$$

$$\lambda(\lambda-1)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \stackrel{?}{<} 0$$

$$\lambda(\lambda-1)(x_1 - x_2)^2 \stackrel{?}{<} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda \in (0, 1) \\ x_1 \neq x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{VERIFICATO!}$$

Esercizio 2:

Provare che $\forall a, b \geq 0$ $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \quad \forall p > 1$.

NOTA: una stima più grossolana (ma immediata) di $(a+b)^p$ è $2^p(a^p + b^p)$, infatti

$$(a+b)^p \leq (2 \max(a, b))^p$$

Assumiamo $a \geq b$ (uguale il viceversa).

$$\leq 2^p a^p$$

$$\forall p > 1, b > 0 \Rightarrow b^p > 0 \rightarrow$$

$$\leq 2^p a^p + 2^p b^p$$

$$= 2^p(a^p + b^p).$$

Svolgimento:

Prendiamo la funzione $f(t) = t^p$, $p > 1$, $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Essa è convessa $\forall p > 1$, quindi scegliamo

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_2 = b, \\ \lambda = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow 1-\lambda = \frac{1}{2}). \end{cases}$$

Otteniamo

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^p \leq \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Tale espressione è equivalente a

$$\frac{1}{2^p}(a+b)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p),$$

Cioè

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Esercizio 3 (caratterizzazione di convessità per funzioni derivabili):

Dimostrare che una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile è convessa se e solo se $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

Dimostrazione:

Per la caratterizzazione in **Esercizio 1** $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(y + \lambda(x-y)) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \stackrel{+}{=} f(y)$$

$$\updownarrow \lambda x + (1-\lambda)y$$

$$f(y + \lambda(x-y)) - f(y) \leq \lambda f(x) + f(y) - \lambda f(y) - f(y) = \lambda(f(x) - f(y))$$

$$\updownarrow \lambda > 0$$

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda}$$

$\lambda \mapsto y + \lambda(x-y)$
↓
poiché f è derivabile e la mappa è lineare.

Definiamo $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $g(\lambda) := f(y + \lambda(x-y))$ derivabile:

$$\frac{g(\lambda) - g(0)}{\lambda - 0} = \frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} g'(0)$$

$$g'(\lambda) = f'(y + \lambda(x-y)) \cdot (x-y) \Rightarrow g'(0) = f'(y)(x-y)$$

Di conseguenza otteniamo che $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(x) - f(y) \geq \frac{f(y + \lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda}$$

$$\downarrow \lambda \rightarrow 0^+$$

$$f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y),$$

ovvero la tesi

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

□

Alcune importanti disuguaglianze:

Disuguaglianza di Young:

Dati $p, q \in (1, +\infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $\forall a, b \geq 0$ vale

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

NOTA: per $p=q=2$ la disuguaglianza è nota (e di facile dimostrazione): $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Dimostrazione:

⚠ Se $a=0$ e/o $b=0$, banale.

Quindi assumiamo $a, b \neq 0$.

Notiamo che la funzione $f: t \mapsto \log(t)$ è concava in $(0, +\infty)$, quindi scegliamo

$$\begin{cases} x_1 = a^p, \\ x_2 = b^q, \\ \lambda = \frac{1}{p} \in (0, 1) \quad (\Rightarrow 1-\lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} \text{ per h.p.}). \end{cases}$$

Otteniamo che

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\ &= \log a + \log b \\ &= \log(a \cdot b). \end{aligned}$$

Quindi per la monotonia della funzione esponenziale otteniamo

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Disuguaglianza di Hölder:

Dati $p, q \in (1, +\infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) con $a_i \cdot b_i \geq 0$ vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

Dimostrazione: (sarà svolta nella lezione del 15/12/23)

Applichiamo la disuguaglianza di Young a

$$\begin{cases} x = \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}}, & y = \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} \\ \text{e gli stessi } p, q \in (1, +\infty) \text{ di prima.} \end{cases}$$

Otteniamo

$$x \cdot y = \frac{a_i \cdot b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

Sommiamo per $i=1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i \cdot b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q},$$

non dipende da i non dipende da i non dipende da i

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad \text{per h.p.}$$

Da cui otteniamo la tesi. □

Un **CASO PARTICOLARE** della disuguaglianza di Hölder per $p=q=2$ è:
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) con $a_i \cdot b_i \geq 0$ vale che

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}.$$

Disuguaglianza di Jensen:

Dato una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa (risp. concava) e di classe $C^1((\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ e una funzione $g \in \mathcal{R}([a, b])$, vale che

$$f\left(\underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{(z)}\right) \leq \int_a^b (f \circ g)(x) dx.$$

NOTA: $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ è la media integrale di f .

Dimostrazione: Isola svolta nella lezione del 15/12/23)

Poiché $f \in C^1((\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ ed è convessa, vale la caratterizzazione del I ordine, ovvero

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

Scelgo $y \mapsto \int_a^b g(t) dt$ e $x \mapsto g(x)$, $x \in [a, b]$, e ottengo

$$f(g(x)) \geq f\left(\int_a^b g(t) dt\right) + f'\left(\int_a^b g(t) dt\right)\left(g(x) - \int_a^b g(t) dt\right)$$

Integro in $[a, b]$ e uso la monotonia di f

$$\int_a^b f(g(x)) dx \geq \int_a^b \underbrace{f\left(\int_a^b g(t) dt\right)}_{\text{"L"}} dx + f'\left(\int_a^b g(t) dt\right) \left(\int_a^b g(x) dx - (b-a) \int_a^b g(t) dt\right).$$

Divido per per $(b-a)$

$$\int_a^b f(g(x)) dx \geq \underbrace{\int_a^b f\left(\int_a^b g(t) dt\right) dx}_{\frac{b-a}{b-a} f\left(\int_a^b g(t) dt\right)} + f'\left(\int_a^b g(t) dt\right) \underbrace{\left(\int_a^b g(x) dx - \int_a^b g(t) dt\right)}_0.$$

NOTA: $\int_a^b c dx = \frac{c}{b-a} \int_a^b dx = \frac{b-a}{b-a} c = c.$

Quindi otteniamo la tesi

$$\int_a^b (f \circ g)(x) dx \geq f\left(\int_a^b g(x) dx\right).$$

□

Prossima lezione (15/12/23):

★ Disuguaglianza di Young generalizzata: ← si dimostra con Jensen: $f(t) = \log(t)$ e g una opportuna funzione costante a tratti.

Dati $p_1, \dots, p_n \in (1, +\infty)$ tali che $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1$, vale che

$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) con $a_i \geq 0$

$$\prod_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^{p_i}}{p_i}$$

↑ In generale, esistono le versioni generalizzate di tutte le disuguaglianze viste!

↑ Inoltre esiste una versione discreta della disuguaglianza di Jensen (con cui è ancora più immediato dimostrare ★).

Una conseguenza immediata della disuguaglianza di Young generalizzata è:

Disuguaglianza della media aritmetica-geometrica:

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) con $x_i \geq 0$ vale che

$$\text{media aritmetica} \leftarrow MA(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \geq (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}} = MG(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \text{media geometrica}$$