Funzioni Goniometriche Inverse

Anna Sanfilippo

1 Funzioni Inverse

Le funzioni goniometriche definiscono il valore del seno, del coseno e della tangente di un angolo. Le loro funzioni inverse, invece, sono quelle che definiscono l'angolo il cui seno, coseno o tangente è un certo numero.

- L'inverso della funzione seno è l'arcoseno, *arcsin*;
- L'inverso della funzione coseno è l'arcocoseno, *arccos*;
- L'inverso della funzione tangente è l'arcotangente, *arctan*.

Tuttavia c'è un problema con queste funzioni inverse ed è legato alla periodicità delle funzioni goniometriche principali.

2 Il problema delle funzioni inverse

Se è vero che per ogni angolo esiste un solo valore di seno, un solo valore di coseno ed un solo valore di tangente, è anche vero che ci sono angoli che hanno lo stesso seno, coseno e tangente. Quindi per ogni valore di seno, coseno e tangente (all'interno delle rispettive immagini) ci sono più angoli associati e questi angoli sono infiniti.

Ad esempio si vede piuttosto bene dal grafico della funzione seno, che si ripete ogni 2π. Se si traccia una retta orizzontale che interseca la sinusoide, ci si accorge che si intersecano un sacco di volte, trovando quindi altrettanti angoli. Va notato che di questi angoli solo due si trovano dentro il primo giro del cerchio goniometrico (cioè sono minori – o uguali – di 2π).

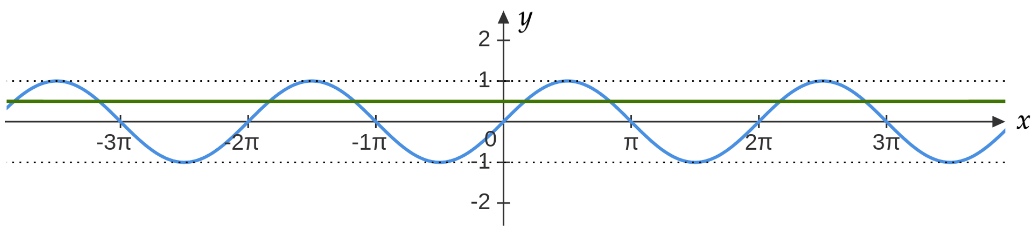

Figure 1: Grafico di $\sin(x)$.

La soluzione al problema sta quindi nel restringere il dominio e il codominio.

3 Arcoseno

Per eliminare l'ambiguità dell'inverso della funzione seno, l'arcoseno, bisogna rendere invertibile la funzione seno. Per fare ciò restringiamo il codominio ($\mathbb{R}$) all'immagine ($[-1,1]$), in modo da renderla suriettiva, e il dominio all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, in modo da renderla iniettiva. In pratica consideriamo

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] \,.$$

In questo modo otteniamo una nuova funzione che è biettiva e quindi invertibile. A questo punto possiamo definire la funzione inversa del seno di x, che prende il nome di arcoseno di x, come

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\longmapsto \arcsin(x). \end{aligned}$$

Essa ha come dominio l'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$ e come immagine $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

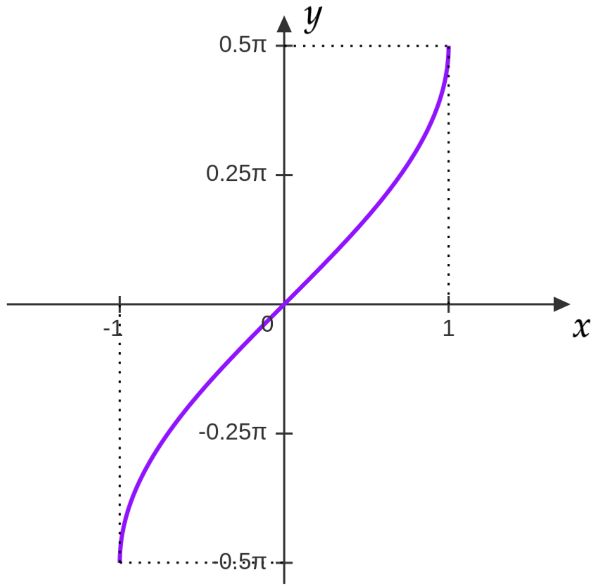

Figure 2: Grafico di $\arcsin(x)$.

4 Arcocoseno

La funzione arcocoseno è l'inversa della funzione coseno, che però nella sua definizione generale non è invertibile. Per questo motivo ragioniamo in modo analogo rispetto al caso dell'arcoseno e rendiamo la funzione coseno biettiva. Per fare ciò restringiamo il codominio ($\mathbb{R}$) all'immagine ($[-1,1]$), in modo da renderla suriettiva, e il dominio all'intervallo $[0,\pi]$, in modo da renderla iniettiva. In pratica consideriamo

$$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]\,.$$

Ciò ci permette di definire la funzione arcocoseno di x come

$$\begin{aligned} \arccos : [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longmapsto \arccos(x). \end{aligned}$$

Essa ha come dominio l'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$ e come immagine $[0,\pi]$.

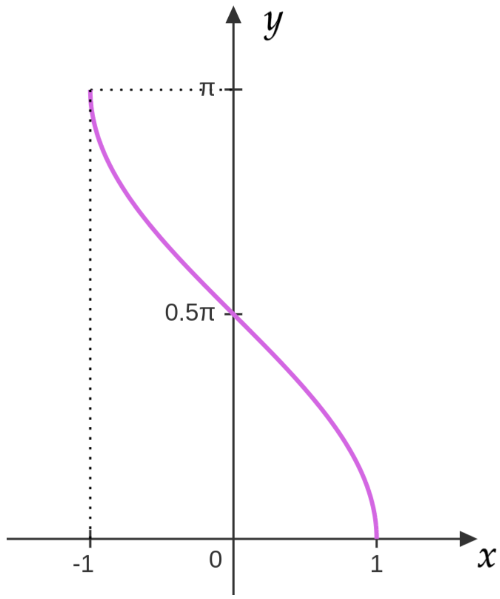

Figure 3: Grafico di $\arccos(x)$.

5 Arcotangente

La funzione arcotangente è l'inversa della funzione tangente. Poichè quest'ultima è suriettiva ma non iniettiva, per poterne definire l'inversa dobbiamo restringere il dominio della tangente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. In pratica consideriamo

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

La funzione inversa della tangente di x, che prende il nome di arcotangente di x, è definita come

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longmapsto \arctan(x). \end{aligned}$$

Essa ha come dominio tutto l'asse reale e come immagine l'intervallo aperto e limitato $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

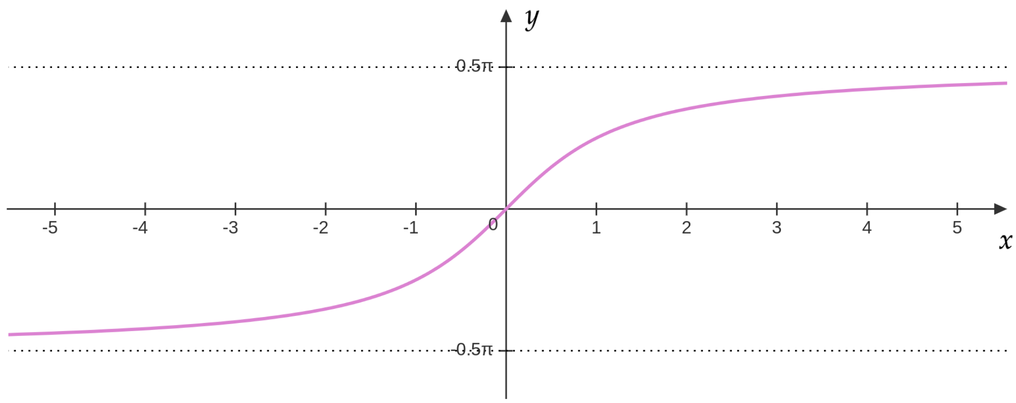

Figure 4: Grafico di $\arctan(x)$.