

Determinare il carattere delle seguenti serie (eventualmente in funzione di $\alpha \in \mathbb{R}$)

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+3}}{(3n+1)^n}$

• (C.N.: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+3}}{(3n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{(3+\frac{1}{n})^n} = 0$)

• usiamo il criterio della radice: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n})^3}{3n+1} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{CONVERGENTE}$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n ((n+1)!)^2}{(2n)!}$

• criterio del rapporto: $\frac{2^{n+1} ((n+2)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n ((n+1)!)^2} = \frac{\cancel{2^{n+1}} ((n+2) \cancel{(n+1)!})^2 \cancel{(2n)!}}{\cancel{2^n} (\cancel{(n+1)!})^2 (2n+2)(2n+1) \cancel{(2n)!}} = \frac{2(n+2)^2}{(2n+2)(2n+1)}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{la serie è CONVERGENTE}$

3) $\sum_{n=5}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - 1 + e^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{n}} \right)$

• notiamo che, per $\alpha=0$ o $\alpha=-1$, $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = -\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{2}{\sqrt{n}} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \text{la serie DIVERGE NEGATIVAMENTE per confronto asintotico con } -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

• altrimenti, otteniamo $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6(\sqrt{n})^3} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right) \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2(\sqrt{n})^3} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \right) - 1 + \left(1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{n} + \frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{2n^2} + o(n^{-2}) \right)$
 $= \frac{\alpha(\alpha+1)-2}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o(n^{-\frac{3}{2}}) \text{ per } n \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow \text{per confronto asintotico, la serie è CONVERGENTE se e solo se } \alpha(\alpha+1)-2=0 \Leftrightarrow \alpha=-2 \vee \alpha=1$

N.B. in questo caso sviluppo fino al 1° ordine perché mi basta controllare solo il termine principale del prodotto

$$4) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \log^\alpha(1+2^{n^2})}$$

razionalizzo +
proprietà del log

$\mathcal{L} > 0$, circa $\mathcal{L} \sim \frac{\sqrt{2}}{\log 2}$

• $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$; inoltre $a_n \sim \frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2})}{n^{2\alpha} \left[\log 2 + \frac{1}{n^2} \log\left(1 + \frac{1}{2^{n^2}}\right) \right]^\alpha} \sim \frac{\mathcal{L} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n}}{n^{2\alpha}} = \frac{\mathcal{L}}{n^{2\alpha - 1/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$

• $\Rightarrow$ per confronto asintotico, la serie è CONVERGENTE se e solo se $2\alpha - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{8}$

$$5) \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}}\right)$$

• è serie a segni alterni (e C.N.: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$)

• posto $b_n := \arctan \frac{1}{n\sqrt{\log n}} \Rightarrow \begin{cases} b_n > 0 & \forall n \geq 2 \\ b_{n+1} < b_n \\ b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \Rightarrow$ per Leibniz, la serie CONVERGE

$\arctan(x)$ monotona (crescente)
" $x\sqrt{\log x}$ " " "

$$6) \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{n \log \log n}$$

• come sopra, la serie è a segni alterni $\Rightarrow$ pongo $b_n = \arcsin\left(\frac{1}{n \log \log n}\right) \Rightarrow b_n > 0, b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

e, analogamente a sopra, $b_n \searrow \Rightarrow$ per Leibniz, la serie CONVERGE

$$7) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^{3/2}}$$

• è serie a segni alterni (e C.N.: $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$), ma $b_n = \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^{3/2}} = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ \frac{2}{n^{3/2}} & n \text{ pari} \end{cases}$

$\Rightarrow b_n$ non è decrescente e non possiamo usare Leibniz

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1 + \cos(n\pi)}{n^{3/2}} \right| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{3/2}} < +\infty \Rightarrow$ la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Determinare $E_{\alpha, \beta} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\alpha} \log^{\beta}(1+n^m)} < +\infty \right\}$

• $a_n > 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow$ la serie converge o diverge positivamente

• studiamo l'asintotica:
$$\begin{cases} \arccos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{\pi}{2} & \text{per } n \rightarrow +\infty \\ \log^{\beta}(1+n^m) = \left[m \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n^m}\right) \right]^{\beta} \sim n^{\beta} \log^{\beta} n & \text{per } n \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n \sim \frac{n^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\pi}{2}}{n^{\alpha+\beta} \log^{\beta} n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{n^{\alpha+\beta-\frac{2}{3}} \log^{\beta} n} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\gamma} \log^{\delta} n} < +\infty$ se $\begin{cases} \gamma > 1 \\ \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$ o $\begin{cases} \gamma = 1 \\ \delta > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \frac{2}{3} > 1 \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha + \beta - \frac{2}{3} = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$

• $\Rightarrow E_{\alpha, \beta} = \left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \left(\alpha > \frac{5}{3} - \beta \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \right) \vee \left(\alpha = \frac{5}{3} - \beta \text{ e } \beta > 1 \right) \right\}$

Sia $(a_n)_n$ una successione di numeri reali positivi t.c. $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1$

Stabilire la veridicità delle seguenti affermazioni:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (VERO)

• $0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{4} \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow 0 < a_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ per confronto, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \frac{1}{3}$ (VERO)

• $a_n < \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n < \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a_n}} = +\infty$ (VERO)

• $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow$ la serie diverge

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{a_n}$ è convergente (VERO)

• $0 < |(-1)^n \sqrt{a_n}| \leq \sqrt{a_n} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \sqrt{a_n}| < \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$

• la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{a_n}$ converge assolutamente per confronto con $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ successioni di numeri reali positivi t.c. $a_n = o(b_n)$ per $n \rightarrow +\infty$

Stabilire se le seguenti affermazioni seguono dalle ipotesi:

a) se $(a_n)_n$ è infinitesima, anche $(b_n)_n$ lo è (FALSO)

• prendiamo $a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1/n & n \geq 1 \end{cases}$ e $b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

b) se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ (VERO)

• dato che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow 0 < a_n < b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$

• per criterio del confronto, $\sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} a_n < \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\bar{n}-1} a_n + \sum_{n=\bar{n}}^{+\infty} a_n < +\infty$

N.B. somma finita

c) se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$ (FALSO)

• scegliamo $a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1/n^2 & n \geq 1 \end{cases}$ e $b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty \end{cases}$

d) se $a_n b_{n+1} \geq a_{n+1} b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ (VERO)

• $c_n = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \begin{cases} c_n > 0 \\ c_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} = c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{per Leibniz, } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{b_n} < +\infty$

Determinare il carattere delle seguenti serie al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^{n+1}}$ con $\alpha > 0$

• C.N.: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^{n+1}} = \begin{cases} +\infty & 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{la serie non converge per } 0 < \alpha \leq 1$

inoltre, siccome $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, la serie diverge per $0 < \alpha \leq 1$

• CASO $\alpha > 1$: usiamo il criterio del rapporto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{\alpha^{n+1} + 1} \frac{\alpha^{n+1}}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^{n+1} + 1} = \frac{1}{\alpha}$
 $\Rightarrow$ la serie converge $\forall \alpha > 1$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n}$, $\beta \geq 0$

• serie a termini positivi; C.N.: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta^n}{\beta^n} = 1 & \beta > 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{2} & \beta = 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\beta}{4}\right)^n = 0 & 2 < \beta < 4 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 & \beta = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 & 0 \leq \beta < 2 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

• se $\beta \in [0, 2[$, $\frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Rightarrow$ per confronto asintotico, la serie converge

se $\beta = 2$, $\frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n} \sim 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \Rightarrow$ " " , " "

se $\beta \in]2, 4[$, $\frac{\beta^n + 2^n}{\beta^n + 4^n} \sim \left(\frac{\beta}{4}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\beta}{4}\right)^n = \frac{\beta}{4-\beta} \Rightarrow$ " " , " "

• $\Rightarrow$ la serie converge assolutamente per $\beta \in [0, 4[$ e diverge per $\beta \in [4, +\infty[$

Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze (o riconducibili ad esse)

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(1+x)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

• raggio di convergenza: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{4}{(n+1)^\alpha} \frac{n^\alpha}{4} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1 \Rightarrow r=1$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE} & \forall x \in \mathbb{R}: (x+1) \in (-1, 1) \longrightarrow \forall x \in (-2, 0) \\ \text{" NON CONVERGE} & \forall x \in \mathbb{R}: (x+1) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \forall x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

• $\forall x \in (0, +\infty)$ la serie è a termini positivi $\Rightarrow$ diverge $\forall \alpha$

• per $x=0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge assolutamente} & \text{per } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{per } \alpha \leq 1 \end{cases}$

• per $x=-2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^\alpha} \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{4(-1)^n}{n^\alpha} \right| \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} & \text{per confronto asintotico, conv. assolutamente se } \alpha > 1 \\ \text{converge semplicemente per Leibnitz} & \text{per } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{non converge} & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}$

• $\Rightarrow$ la serie converge $\begin{cases} \text{assolutamente} & \begin{cases} \forall x \in]-2, 0[, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \forall x \in [-2, 0], \forall \alpha > 1 \end{cases} \\ \text{semplicemente} & \text{per } x=-2 \text{ e } 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$

non converge $\begin{cases} \forall x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{per } x=-2 \text{ e } \alpha \leq 0 \\ \text{per } x=0 \text{ e } \alpha \leq 1 \end{cases}$

in particolare, diverge $\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{per } x=0 \text{ e } \alpha \leq 1 \end{cases}$

$$2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{n+1}$$

(lasciato per casa ai matematici)

- $x \neq 1$; ponendo $t = \frac{x+1}{x-1}$ abbiamo $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$

- raggio di convergenza: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow r = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE} & \forall t \in (-1, 1) \longrightarrow \forall x \in (-\infty, 0) \\ \text{" NON CONVERGE} & \forall t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{1\} \end{cases}$$

- se $x \in (1, +\infty)$, la serie è a termini positivi $\Rightarrow$ diverge

- se $t = 1$, $\frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

- se $t = -1$, $\frac{x+1}{x-1} = -1 \Rightarrow x = 0$ e $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge assolutamente

- $\Rightarrow$ la serie $\begin{cases} \text{converge assolutamente} & \forall x \in]-\infty, 0] \\ \text{non converge} & \forall x \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ \text{in particolare, diverge} & \forall x \in]1, +\infty[\\ \text{non è definita} & x = 1 \end{cases}$

$$3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 2^{n+1}}{(n+2)!} \sin^n(x)$$

(lasciato per casa ai fisici)

$$\bullet t = \sin(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n t^n$$

$$\bullet \text{raggio di convergenza: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! 2^{n+1} + 1}{(n+3)!} \frac{(n+2)!}{n! 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cancel{n!} 2^{\cancel{n}} \left(2 + \frac{1}{(n+1)! 2^n} \right)}{(n+3) \cancel{n!} 2^{\cancel{n}} \left(1 + \frac{1}{n! 2^n} \right)} = 2$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \forall t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\text{ la serie \u00e9 convergente} \\ \forall t \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[\text{ la serie non converge} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ per } t = \frac{1}{2}, \text{ abbiamo } a_n = \frac{n! 2^{n+1}}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^n \sim \frac{n!}{(n+2)!} \sim \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{per confronto asintotico,}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! 2^{n+1}}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^n < +\infty$$

$$\bullet \text{ per } t = -\frac{1}{2}, \text{ abbiamo } a_n = (-1)^n \frac{n! 2^{n+1}}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow \text{per il caso precedente, la serie}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n! 2^{n+1}}{(n+2)!} \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ \u00e9 assolutamente convergente}$$

$$\bullet \Rightarrow \text{la serie converge assolutamente } \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad \text{non converge in particolare, diverge}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}$$



$$\forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right]$$