

Esercitazione Fisici e Matematici 06/12/24:

Esercizio 1:

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile su $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}([a, b])$) e $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x) \forall x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$.

Dimostrare che $g \in \mathcal{R}([a, b])$ e che $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

NOTA TEORICA:

Definizione (integrale secondo Riemann):

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata si dice integrabile secondo Riemann, o Riemann integrabile, se $\sup S_n = \inf S_n$.

E' detto integrale di Riemann di f la quantità $\int_a^b f(x) dx = \sup S_n = \inf S_n$.

Remark (Linearietà dell'integrale):

$f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vale la seguente proprietà:

$$(*) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Svolgimento:

Consideriamo la funzione $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ così costruita

$$h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq x_0, \\ f(x_0) - g(x_0) & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Ora ci basta dimostrare

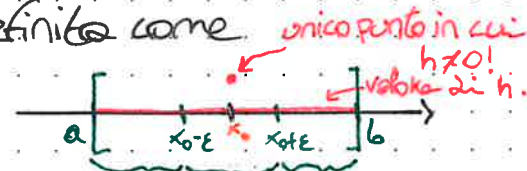
1) $h \in \mathcal{R}([a, b])$, da cui $g(x) = f(x) - h(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ per (*);

2) $\int_a^b h(x) dx = 0$, da cui $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ sempre per (*).

1) TESI: $h(x) \in \mathcal{R}([a, b])$.

$\forall \epsilon > 0$ sia D_ϵ la partizione di $[a, b]$ definita come

$$D_\epsilon := \{x_1 = a, x_2 = x_0 - \epsilon, x_3 = x_0 + \epsilon, x_4 = b\}.$$



$$s(D_\epsilon, h) = \sum_{i=1}^3 \inf_{x_i, x_{i+1}} h(x) (x_{i+1} - x_i) = 0 + \underbrace{\inf_{[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} h(x) \cdot 2\epsilon}_{\leq 0} + 0 = \inf_{[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} h(x) \cdot 2\epsilon \leq 0$$

$$S(D_\epsilon, h) = \sup_{[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]} h(x) \cdot 2\epsilon \geq 0.$$

Per ogni partizione D più fine di D_ε ($D_\varepsilon < D$) vale

$$s(D_\varepsilon, h) \leq s(D, h) \text{ e } S(D, h) \leq S(D_\varepsilon, h).$$

Quindi

$$0 = \sup_{\varepsilon > 0} s(D_\varepsilon, h) \leq \sup_D s(D, h) \leq \inf_D S(D, h) \leq \inf_{\varepsilon > 0} S(D_\varepsilon, h) = 0.$$

In particolare ne consegue che

$$\sup s(D, h) = \inf S(D, h) = 0,$$

ovvero abbiamo dimostrato

$$1) h \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow g \in \mathcal{R}([a, b]);$$

e

$$2) \int_a^b h(x) dx = \inf_D S(D, h) = \sup_D s(D, h) = 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

NOTA: Equivoltentemente si può dimostrare che $h \in \mathcal{R}([a, b])$ con la caratterizzazione: $\forall \varepsilon > 0 \quad S(D_\varepsilon, h) - s(D_\varepsilon, h) < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$ prendiamo la partizione

$$D_\varepsilon := \{x_1 = a, x_2 = x_0 - \frac{\varepsilon}{4|h(x_0)|}, x_3 = x_0 + \frac{\varepsilon}{4|h(x_0)|}, x_4 = b\}.$$

$$S(D_\varepsilon, h) = \sup_{[x_2, x_3]} h(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} \quad \text{e} \quad s(D_\varepsilon, h) = \inf_{[x_2, x_3]} h(x) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|}.$$

Quindi avremo che

$$\begin{aligned} S(D_\varepsilon, h) - s(D_\varepsilon, h) &= \left(\sup_{[x_2, x_3]} h(x) - \inf_{[x_2, x_3]} h(x) \right) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} = (|h(x_0)| - 0) \cdot \frac{\varepsilon}{2|h(x_0)|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$



Esercizio 2:

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.
Dimostrare che se $\int_a^b f(x) dx = 0$, allora $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

Svolgimento:

Procediamo per assurdo: $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \neq 0$.

$\exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x_0) > 0$ ($f(x) \geq 0$ per hp.).
continua

Per il teorema di permanenza del segno.

(*) $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $f(x) > 0$ $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.

Inoltre $f \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a, x_0 - \varepsilon]), \mathcal{R}([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]), \mathcal{R}([x_0 + \varepsilon, b])$.

Loiè:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \geq \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx > 0.$$

per (*).

Loiè è assurdo dato che per hp. $\int_a^b f(x) dx = 0$.



Esercizio 3:

Scrivere i primi due termini dello sviluppo di Taylor centrato in $x_0 = 0$ della funzione $g(x) = \int_{x^3}^{-x^2} e^{-t^2} dt$.

Determinare, se esistono, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$.

Remark:

$f \in C^0([a, b])$, $\alpha(x), \beta(x): I \rightarrow [a, b]$ derivabili, allora
$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \quad \forall x \in [a, b].$$

Svolgimento:

i) Vogliamo sviluppare $g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$.

ii) $g(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$.

Definiamo $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, da cui $g(x) = f(-x^2) - f(x^3)$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

e^{-t^2} continua $\stackrel{\text{TFC}}{\Rightarrow} f$ derivabile su $\mathbb{R}$, $\Rightarrow g$ derivabile su $\mathbb{R}$.
 $-x^2$ e x^3 derivabili.

In particolare otteniamo

ii) $g'(x) = f'(-x^2) \cdot (-2x) + f'(x^3) \cdot (3x^2) = -2xe^{-x^4} - 3x^2e^{-x^6} \Rightarrow g'(0) = 0$,

iii) $g''(x) = -2e^{-x^4} + 8x^4e^{-x^4} - 6xe^{-x^6} + 18x^7e^{-x^6} \Rightarrow g''(0) = -2$.

Da i), ii) e iii) abbiamo che per $x \rightarrow 0$

$$g(x) = 0 + 0 \cdot x - \frac{2x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2).$$

ii) Usiamo lo sviluppo di Taylor ottenuto in i) per studiare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 2, \\ 1 & \alpha = 2, \\ -\infty & \alpha > 2. \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x^\alpha} = 0$ sse $\alpha < 2$.

Esercizio 4:

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \int_0^{x^2} \frac{\cos(2t)}{1+t^2} dt$. Determinare

- i punti critici di g ;
- la parte principale del polinomio di Taylor in 0 associato a g .

Svolgimento:

i) $\frac{\cos(2t)}{1+t^2}$ continua su $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ derivabile su $\mathbb{R} \xRightarrow{\text{TRC}} g(x)$ derivabile su $\mathbb{R}$.

Definiamo $f(x) = \int_0^x \frac{\cos(2t)}{1+t^2} dt$, allora $g(x) = f(x^2)$ e quindi

$$g'(x) = f'(x^2) \cdot (2x) = 2x \frac{\cos(2x^2)}{1+x^4}$$

x è punto critico di g sse $g'(x) = 0$, ovvero sse $2x \frac{\cos(2x^2)}{1+x^4} = 0$.

Lo è verificato per $x=0$ o per

$$\cos(2x^2) = 0 \text{ sse } 2x^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ sse } x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}, k \in \mathbb{Z}.$$

I punti critici sono quindi

$$x=0 \vee x = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1+2k}, k \in \mathbb{N}.$$

ii) sappiamo che $g(0) = \int_0^0 \frac{\cos(2t)}{1+t^2} dt = 0$ e da i) $g'(0) = 0$.

Proviamo quindi a calcolare il termine di secondo ordine:

$$g''(x) = \frac{[2\cos(2x^2) - 8x^2 \sin(2x^2)](1+x^4)}{(1+x^4)^2} + \text{dato che i primi due termini sono nulli!!}$$
$$- \frac{8x^4 \cos(2x^2)}{(1+x^4)^2} \Rightarrow g''(0) = 2.$$

Di conseguenza otteniamo che $P_{2,0}(x) = \frac{2x^2}{2} = x^2$.

Quindi la parte principale di $P_{n,0}(x)$ è x^2 e l'ordine è 2.

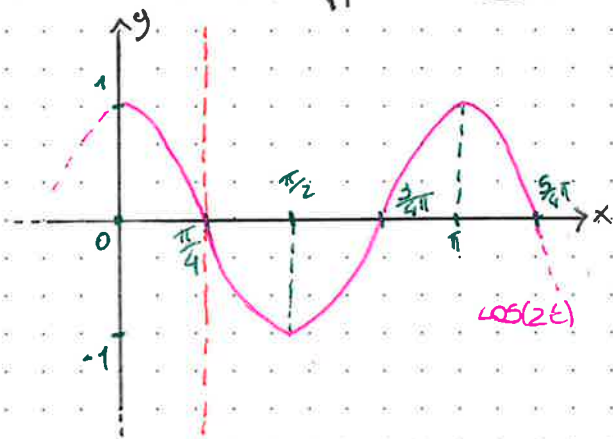
Esercizio 5:

Studiare qualitativamente $F(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x \cos(2t) dt$.

$F(x)$ è la funzione integrale!

Sviluppo:

Cominciamo rappresentando $\cos(2t)$:



estremo di integrazione inferiore
→ "punto di partenza" per lo studio di $F(x)$.

Osserviamo che $F(x)$ ha uno zero in $\frac{\pi}{4}$ ed è di periodo π (ovvero un altro

zero in $\frac{5}{4}\pi$). Inoltre tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ l'area aumenta e $\cos(2t) \leq 0 \forall t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

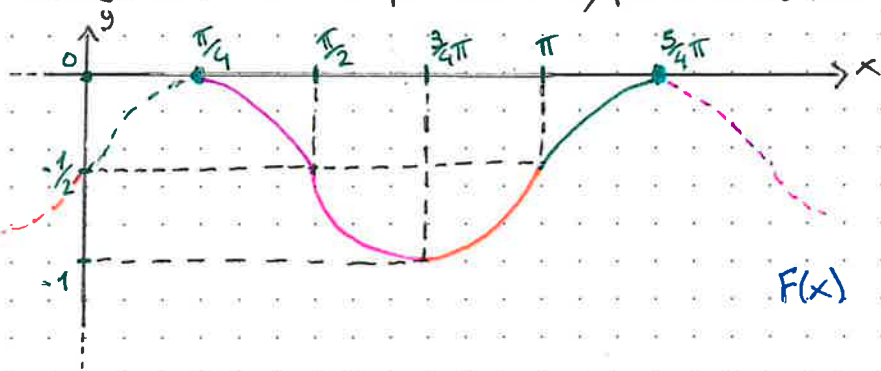
→ la funzione integrale è decrecente e concava. Tra $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{4}\pi$ l'area diminuisce

e $\cos(2t) \leq 0 \forall t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi] \Rightarrow F(x)$ decrecente e convessa. Tra $\frac{3}{4}\pi$ e π l'area

aumenta e $\cos(2t) \geq 0 \forall t \in [\frac{3}{4}\pi, \pi] \Rightarrow F(x)$ crescente e convessa. Tra π e $\frac{5}{4}\pi$

l'area diminuisce e $\cos(2t) \geq 0 \forall t \in [\pi, \frac{5}{4}\pi] \Rightarrow F(x)$ crescente e concava.

Siccome F è π -periodica, possiamo disegnare $F(x) \forall x \in \mathbb{R}$.



Controlliamo analiticamente il nostro lavoro:

la estendiamo su $\mathbb{R}$ per
periodicità del coseno.

$F'(x) = \cos(2x) \Rightarrow F$ di periodo $\pi \Rightarrow$ la studiamo su $[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi]$.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$.

$F''(x) = -2\sin(2x) \Rightarrow F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \pi$.

Lo studio della derivata prima e seconda di F conferma il grafico qualitativo di F precedentemente disegnato.

Esercizio 6: $\hookrightarrow$ per uso per i fisici

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{3-4x}{1+x^2} dx &= 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 4 \int \frac{x}{1+x^2} dx = 3 \arctan(x) + C + \\ &\quad - 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = 3 \arctan(x) - 2 \log(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} dx &= \int \frac{1}{x} \arcsin'(\log(x)) dx = \int (\arcsin(\log(x)))' dx \\ &= \arcsin(\log(x)) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \int \sqrt[3]{2x+1} dx &= \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{8} \int ((2x+1)^{\frac{4}{3}})' dx \\ &= \frac{3}{8} \sqrt[3]{(2x+1)^4} + C. \end{aligned}$$

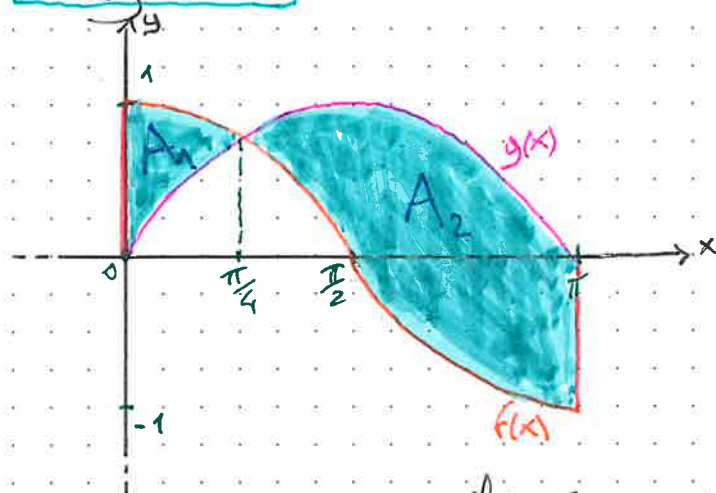
$$\begin{aligned} \text{d)} \int 6x \sin(-3x^2-2) dx &= \int (-6x)(-\sin(-3x^2-2)) dx \\ &= \cos(-3x^2-2) + C. \end{aligned}$$

$$\text{e)} \int 3x e^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + C.$$

Esercizio 7:

Calcolare l'area compresa tra i grafici di $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$ e le rette $x=0$ e $x=\pi$.

Svolgimento:



il resto non ci interessa (dobbiamo studiare l'area tra le rette $x=0$ e $x=\pi$).

Notiamo che su $[0, \pi]$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \pi/4$.

Inoltre $f(x) \geq g(x) \forall x \in [0, \pi/4]$ e $f(x) \leq g(x) \forall x \in [\pi/4, \pi]$.

Allora vale che

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\pi/4} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (g(x) - f(x)) dx.$$

Osserviamo che $\int (\cos x - \sin x) dx = \cos x + \sin x + C$.

Quindi per il teorema di Torricelli - Barrow

$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= [\cos x + \sin x]_0^{\pi/4} - [\cos x + \sin x]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \left[-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right] = \underline{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Esercizio 8:

Calcolare i seguenti integrali:

a) $\int_1^2 \frac{x+2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \frac{s^3+2s}{s^6} \cdot 3s^2 ds = \int_1^{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{3}{s} + \frac{6}{s^3} \right) ds = \left[3\log|s| - \frac{3}{s^2} \right]_1^{\sqrt[3]{2}} = 3\log\sqrt[3]{2} - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 3.$

SOSTITUZIONE: $\sqrt[3]{x} = s \Rightarrow x = s^3 \Rightarrow dx = 3s^2 ds$. $x_0 = 1 \Rightarrow s_0 = 1$ e $x_1 = 2 \Rightarrow s_1 = \sqrt[3]{2}$.

In alternativa:

$$\int_1^2 \frac{x+2\sqrt[3]{x}}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 2x^{(\frac{1}{3}-2)} dx = \log 2 + \left[-3x^{-\frac{2}{3}} \right]_1^2 = \log 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + 3.$$

MORALE: prima di sostituire cercate se ci sono soluzioni più immediate.

b) $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}-3}{x-3\sqrt{x}+2} dx = \int_3^4 \frac{s-3}{s^2-3s+2} \cdot 2s ds = 2 \int_3^4 \frac{s^2-3s+2}{s^2-3s+2} ds = 2 \int_3^4 1 ds - 4 \int_3^4 \frac{1}{s^2-3s+2} ds =$

SOSTITUZIONE: $\sqrt{x} = s \Rightarrow x = s^2 \Rightarrow dx = 2s ds$. $x_0 = 9 \Rightarrow s_0 = 3$ e $x_1 = 16 \Rightarrow s_1 = 4$.

RAZIONALIZZAZIONE: $A, B \in \mathbb{R}$ t.c. $\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} = \frac{As-2A+Bs-B}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s^2-3s+2} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$

$\Rightarrow A = -1$ e $B = 1$.

$$= 2 + 4 \int_3^4 \frac{1}{s-1} ds - 4 \int_3^4 \frac{1}{s-2} ds = 2 + 4(\log 3 - \log 2 - \log 2) = 2 + 4\log \frac{3}{4}.$$

c) $\int_0^{e^{-1/2}} \sqrt{4+x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{4+4\sinh^2(s)} \cdot 2\cosh(s) ds = 2 \int_0^1 \sqrt{4\cosh^2(s)} \cosh(s) ds = 4 \int_0^1 \cosh^2(s) ds$

SOSTITUZIONE: $x = 2\sinh(s) = e^s - e^{-s}$ e $dx = 2\cosh(s)$. $x_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$ e $x_1 = e^{-1/2} \Rightarrow s_1 = 1$.

Integrale per parti: $4\cosh(s)\sinh(s) \Big|_0^1 - 4 \int_0^1 \sinh^2(s) ds = 4\cosh(1)\sinh(1) + 4 \int_0^1 ds - 4 \int_0^1 \cosh^2(s) ds$

Quindi otteniamo che $\int_0^1 \cosh^2(s) ds = \frac{1}{2}\cosh(1)\sinh(1) + \frac{1}{2}$, di conseguenza $\int_0^{e^{-1/2}} \sqrt{4+x^2} dx = 2\cosh(1)\sinh(1) + 2 \approx 5.6269$.

d) $\int \frac{1}{\sin x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \int \frac{1+t^2}{2t+1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$

SOSTITUZIONE: $t = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow x = 2\arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Osservazione: $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = 2 \cdot \frac{\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})} = 2\sin(\frac{x}{2})\cot(\frac{x}{2}) = \sin(x)$.

N.B. ci sono equivalenti per il $\cos(x)$.

$$= 2 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = -\frac{2}{(1+t)} + C = -\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})} + C.$$

Per
cosa
Per
la
matematica