

Esercitazione Fisici e Matematici: 13/12/2024:

Esercizio 1:

Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx.$$

Svolgimento:

$f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}}$, $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e strettamente positiva.

In 0:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} = 0 \Rightarrow f$ è estendibile con continuità in 0 $\Rightarrow$ non è un integrale improprio in 0!!

In 1:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ studiamo la convergenza!

Per $x \rightarrow 1^-$ $f(x) \sim \frac{\sin 1}{\sqrt[4]{1-x}}$ e $0 < \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/4}} < \frac{1}{(1-x)^{1/4}}$.

NOTA: $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases}$

Quindi $\alpha = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/4}} dx$ converge,

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/4}} dx$ converge per il thm. del confronto,

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$ converge per il thm. del confronto asintotico.

Dunque $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x} \sqrt[4]{1-x}} dx$ è convergente.

Esercizio 2:

- a) Determinare tutti i valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}} dx$ converge;
- b) Calcolare, usando la definizione, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx$.

Svolgimento:

a) $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}}$, $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e > 0 .

In 0:

$f(x) \sim \frac{1}{4x^\alpha}$, per il teorema del confronto asintotico

(in 0) converge sse $\alpha < 1$.

A $+\infty$:

$f(x) \sim \frac{1}{9^{\beta+1} x^{\alpha+\beta+1}}$, per il teorema del confronto asintotico

converge sse $\alpha + \beta + 1 > 1$ sse $\alpha > -\beta$ ($\alpha + \infty$).

α, β devono quindi soddisfare $\begin{cases} \alpha > -\beta \\ \alpha < 1 \end{cases}$, ovvero $-\beta < \alpha < 1$.

- b) In questo caso $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ converge, perciò

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx \end{aligned}$$

Primitiva di f :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &\stackrel{\substack{\sqrt{x}=s, x=s^2 \Rightarrow dx=2s \cdot ds}}{=} \int \frac{1}{s(4+9s^2)} 2s ds = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{3}{2}s)^2} ds = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{3} \arctan(t) + C = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}s\right) + C = \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) + C. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) \right]_\epsilon^1 + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right) \right]_1^M = \frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 3:

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza di

$$\int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} dx.$$

Svolgimento:

$f: (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente positiva

$$(f(x) = \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}}).$$

Per $x \rightarrow 1^+$:

$$1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2} \text{ per } t \rightarrow 0^+, \text{ quindi per } x \rightarrow 1^+$$

$$1 - \cos(x-1) = \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2).$$

$$f(x) \sim \frac{\frac{(x-1)^2}{2}}{\underbrace{(x-1)^\alpha (x+1)^\alpha}_{(x^2-1)^\alpha}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^\alpha (x-1)^{\alpha-2}} \text{ per } x \rightarrow 1^+, \text{ quindi}$$

converge se $\alpha - 2 < 1 \Rightarrow \alpha < 3$.

Per $x \rightarrow 2^-$:

$$f(x) \sim \frac{1 - \cos 1}{3^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} \text{ per } x \rightarrow 2^-, \text{ quindi converge se}$$

$$3 - \alpha < 1 \Rightarrow \alpha > 2.$$

$$\text{L'integrale } \int_1^2 \frac{1 - \cos(x-1)}{(x^2-1)^\alpha (2-x)^{3-\alpha}} dx \text{ converge per } \begin{cases} \alpha < 3 \\ \alpha > 2 \end{cases} \Rightarrow 2 < \alpha < 3.$$

Esercizio 4:

$$\text{Sia } f(s) = \frac{e^{-|s|} - 1}{s(s+1)}.$$

- Studiare dominio, segno e derivata prima;
- Tracciare grafico qualitativo;
- Determinare dominio di $F(x) = \int_0^x f(t) dt$;
- Tracciare grafico di $F(x)$.

Svolgimento:

- a) Osserviamo che dom(f) = $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Studiamo il segno:

- $e^{-|s|} - 1 \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad (= 0 \text{ sse } s = 0)$; ← non può esserci $f(0)$, $0 \notin \text{Dom}(f)$.
- $s(s+1) > 0 \text{ sse } s < -1 \vee s > 0$
- $\Rightarrow f(s) > 0 \text{ sse } s \in (-1, 0)$.

Studiamo i limiti di f :

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} f(s) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = -\infty, \quad \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = +\infty,$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0^-} \frac{e^s - 1}{s(s+1)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{e^{-s} - 1}{s(s+1)} = -1.$$

Studiamo $f'(s)$:

$s > 0$:

$$f'(s) = \frac{(-e^{-s})(s(s+1)) - (e^{-s} - 1)(2s+1)}{s^2(s+1)^2} = \frac{-e^{-s}s^2 - e^{-s}s - e^{-s}2s - e^{-s} + 2s + 1}{s^2(s+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{-s}(s+1)^2 - e^{-s}s + 2s + 1}{s^2(s+1)^2} > 0$$

(si deve studiare bene il numeratore per arrivare a questa conclusione. I calcoli non sono facili).

$s < 0$:

$$f'(s) = \frac{(e^s)(s(s+1)) - (e^s - 1)(2s+1)}{s^2(s+1)^2} = \dots < 0$$

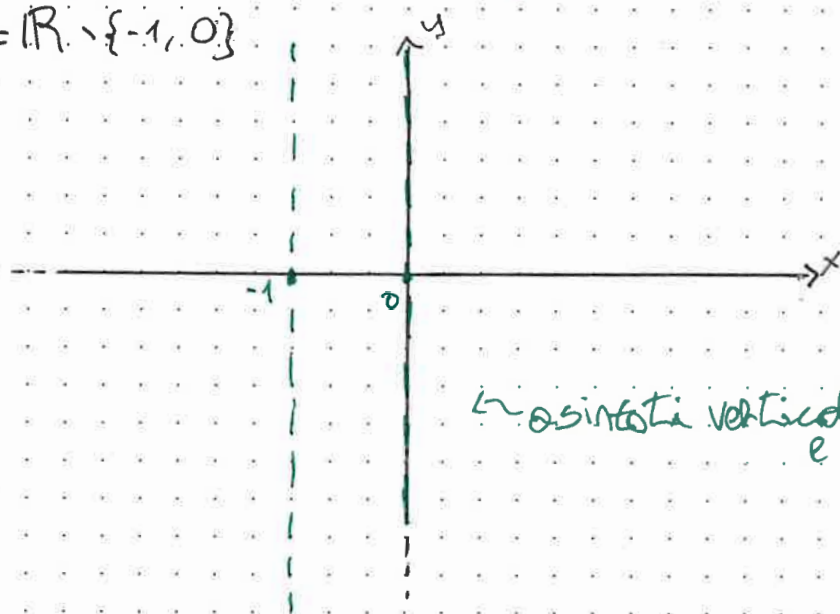
$$\nexists s \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f'(s) = 0.$$

Quindi

$$f(s) \nearrow \text{ per } s > 0 \quad \text{e} \quad f(s) \searrow \text{ per } s < 0.$$

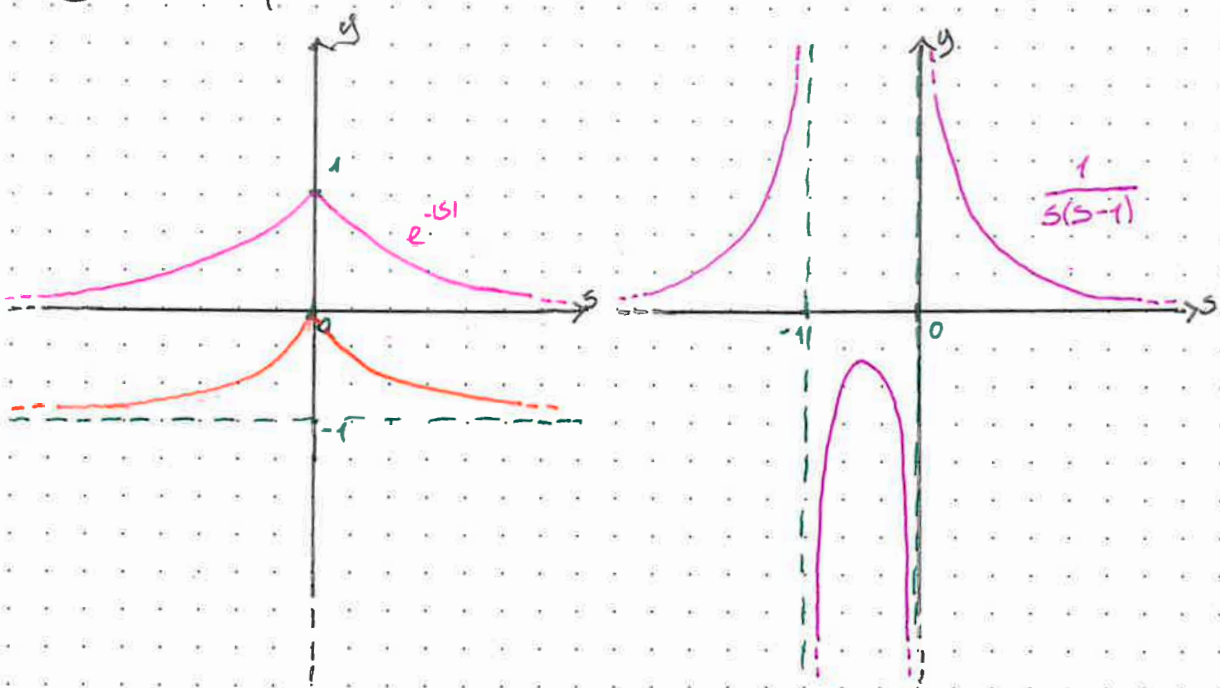
Metodo alternativo per arrivare al punto b):

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$



← asintota verticale in $x = -1$
e $x = 0$!

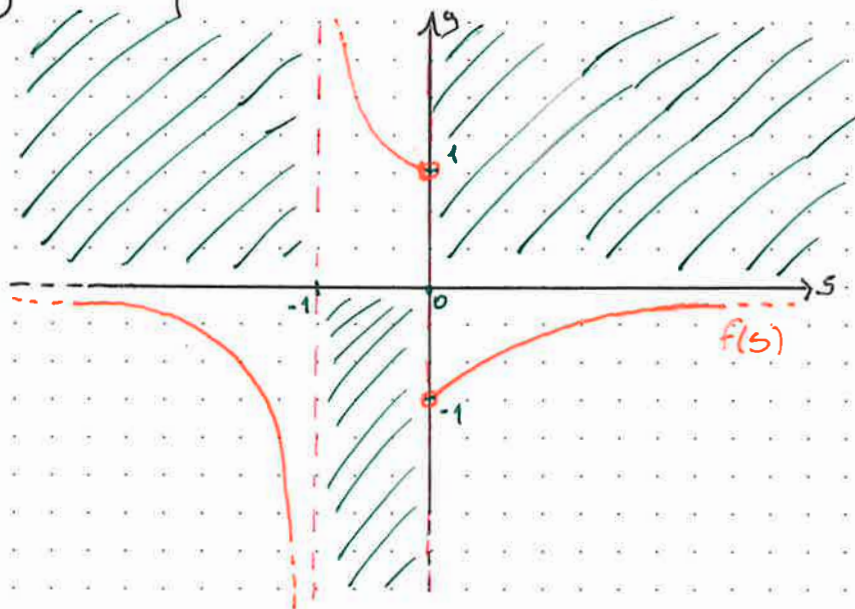
Disegniamo qualitativamente $e^{-|s|} - 1$ e $\frac{1}{s(s-1)}$:



⚠ Si nota che $e^{-|s|} - 1 \leq 0 \forall s \in \mathbb{R}$ e $= 0$ sse $s = 0$.

Di conseguenza, possiamo disegnare $f(s)$ vedendola come $f(s) = (e^{-|s|} - 1) \cdot \left(\frac{1}{s(s-1)}\right)$.

b) Disegniamo qualitativamente $f(s)$:



c) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $\text{dom } F$?

Su $[0, +\infty)$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -1$, allora $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$ è un integrale proprio.

f continua su $(0, \alpha]$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow f \in R([0, \alpha])$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in [0, +\infty)$

$\Rightarrow \underline{[0, +\infty) \subseteq \text{dom } F}$.

Su $(-1, 0)$: analogamente a prima (f continua su $(\alpha, 0)$)

$\forall \alpha \in (-1, 0) \Rightarrow f \in R([\alpha, 0])$ $\forall \alpha \in (-1, 0) \Rightarrow F(\alpha) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in (-1, 0)$

$\Rightarrow \underline{(-1, 0) \subseteq \text{dom } F}$.

In $x = -1$: studiamo la convergenza di $\int_0^{-1} f(t) dt$:

$$\int_0^{-1} f(t) dt = - \int_{-1}^0 \frac{e^t - 1}{t(t+1)} dt \quad \Rightarrow \text{per } t \rightarrow -1^+ \quad \frac{e^t - 1}{t(t+1)} \sim (1 - e^{-1}) \cdot \frac{1}{t+1}$$

e sappiamo che $\int_{-1}^0 \frac{1}{t+1}$ non converge.

Quindi per il teorema del confronto asintotico

$\int_0^{-1} f(t) dt$ non converge $\Rightarrow \underline{-1 \notin \text{dom } F}$.

Di conseguenza $(-\infty, -1) \notin \text{dom } F$.

Quindi $\text{dom } F = (-1, +\infty)$.

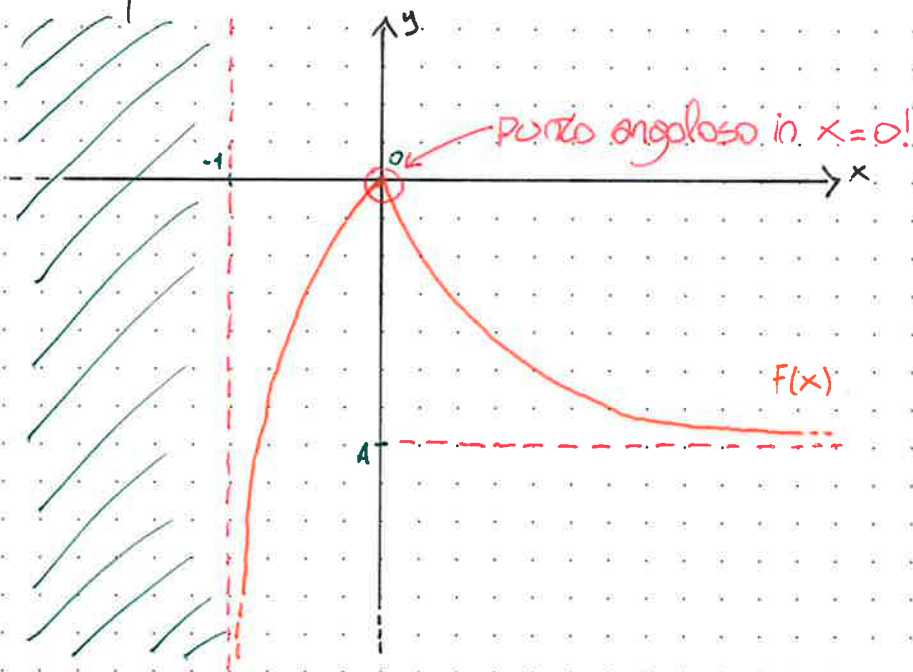
Inoltre $a = +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - 1}{t(t+1)} dt \Rightarrow \text{per } t \rightarrow +\infty \quad \frac{e^{-t} - 1}{t(t+1)} \sim -\frac{1}{t^2}, \quad \leftarrow \text{converge}$$

quindi per il teorema del confronto asintotico converge

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt = \underline{A \in \mathbb{R}}.$$

d). Disegniamo qualitativamente $F(x)$:

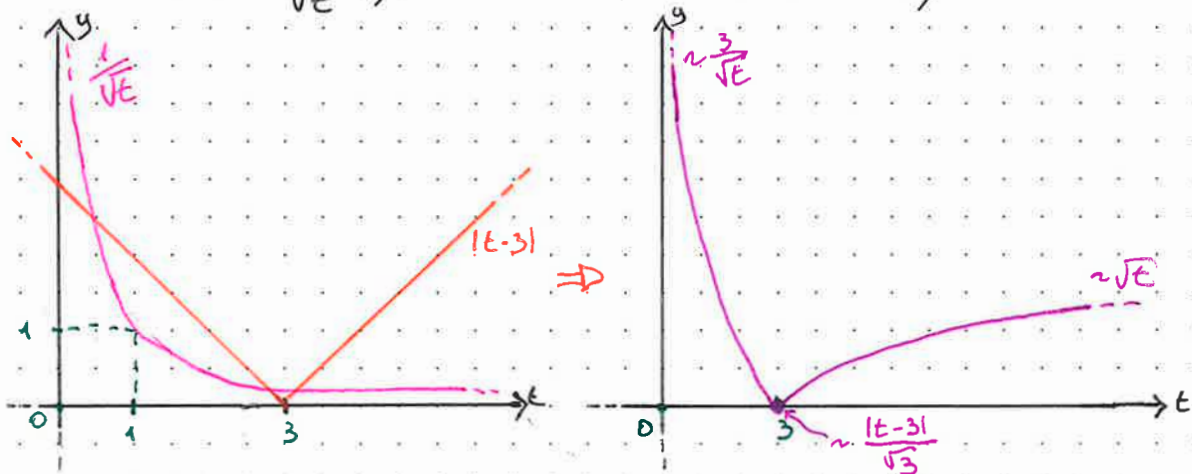


Esercizio 5:

Studiare la funzione integrale $F(x) = \int_1^x \frac{|t-3|}{\sqrt{t}} dt$. Tracciare un grafico qualitativo.

Svolgimento:

Definiamo $f(t) = \frac{|t-3|}{\sqrt{t}}$, $f: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, continua.



Osserviamo che $f(t) \sim \frac{3}{\sqrt{t}}$ per $x \rightarrow 0^+$ $\Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 0.

Segue che $\exists \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) < +\infty$ e quindi si può prolungare $F(x)$ in 0. Quindi

a) dom F = $[0, +\infty)$;

b) segno di F: essendo $f(t) \geq 0 \ \forall t \in (0, +\infty)$, otteniamo
 $F(x) < 0 \ \forall x \in [0, 1)$, $F(1) = 0$, $F(x) > 0 \ \forall x \in (1, +\infty)$;

c) derivate di F:

Dal TFC si ottiene $F'(x) = \frac{|x-3|}{\sqrt{x}} = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x}} & 0 < x < 3, \\ \frac{x-3}{\sqrt{x}} & x \geq 3. \end{cases}$

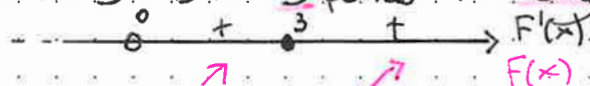
Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = +\infty$ ($x=0$ $\leftarrow$ f non definita in $x=0$! punto con tangente verticale).

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo.

Abbiamo anche che

• $F'(x) > 0 \ \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{3\} \Rightarrow F$ è strettamente crescente;

• $F'(x) = 0$ sse $x=3 \Rightarrow x=3$ punto con tangente orizzontale.

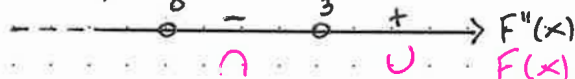


$$F''(x) = \begin{cases} -\frac{x+3}{2\sqrt{x^3}} & 0 < x < 3, \\ \frac{x+3}{2\sqrt{x^3}} & x > 3. \end{cases}$$

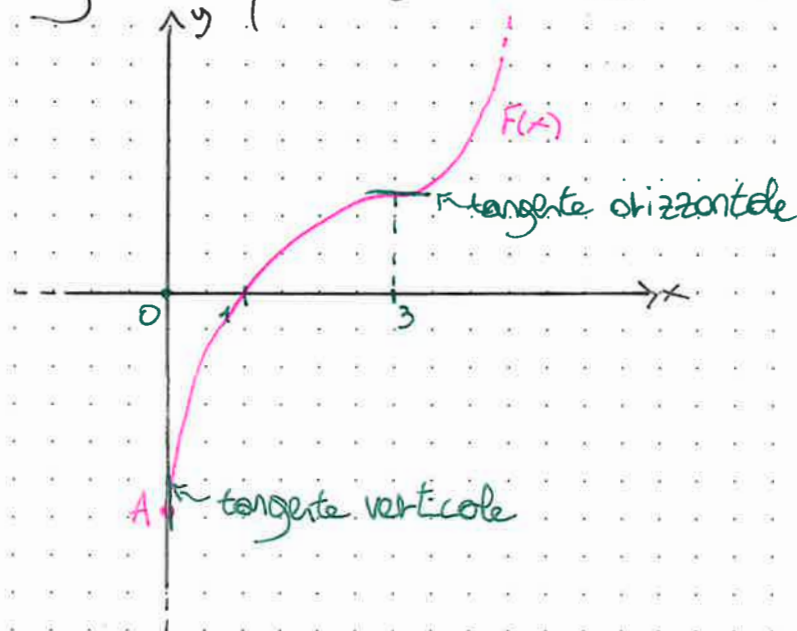
← f non è derivabile in $x=3$!

NOTA: In $x=3$ $\nexists F''(x)$, poiché $\lim_{x \rightarrow 3^+} F''(x) = \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} F''(x)$.

$F''(x) < 0 \forall x \in (0, 3)$ e $F''(x) > 0 \forall x \in (3, +\infty)$.



Disegniamo qualitativamente $F(x)$:



Per casa:

Trovare il valore A , dove $F(0) = A$.

NOTA: A è il minimo assoluto di F ($x=0$ punto di minimo assoluto).

Idea: Scrivere $F(x)$ come

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{3-t}{\sqrt{t}} dt & 0 \leq x < 3, \\ \int_1^3 \frac{3-t}{\sqrt{t}} dt + \int_3^x \frac{t-3}{\sqrt{t}} dt & x \geq 3. \end{cases}$$

Calcolare $\int \frac{3-t}{\sqrt{t}} dt$ e di conseguenza $F(0)$.

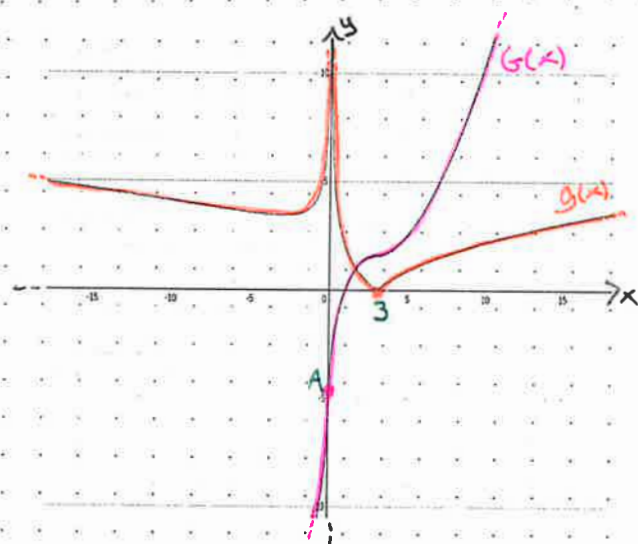
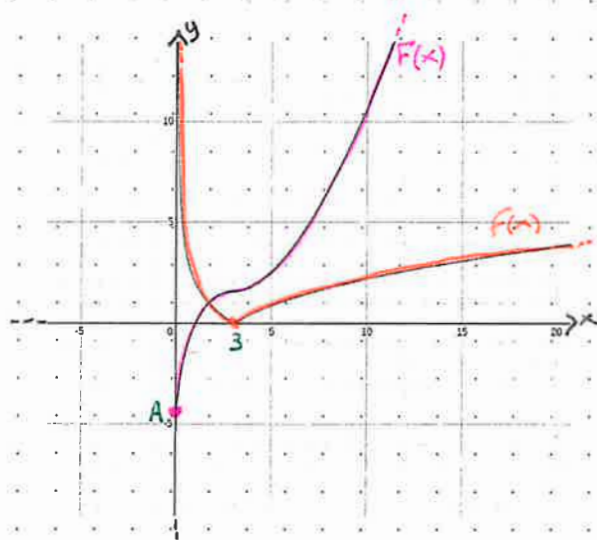
Extra:

Cosa cambia considerando $G(x) = \int_1^x \frac{|t-3|}{\sqrt{|t|}} dt$?

Notiamo che ora $g(t) = \frac{|t-3|}{\sqrt{|t|}}$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Come per $f(t)$, $g(t)$ è integrabile in senso improprio in un intorno di 0 $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) < +\infty \Rightarrow G$ è estendibile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

- Su $(-\infty, 0)$ $g(t) > 0 \Rightarrow G(x) < 0$, per $x > 0$ $G(x) = F(x)$.
- Dato che $F(0) = A$, anche $G(0) = A$, ma non è più minimo per G .

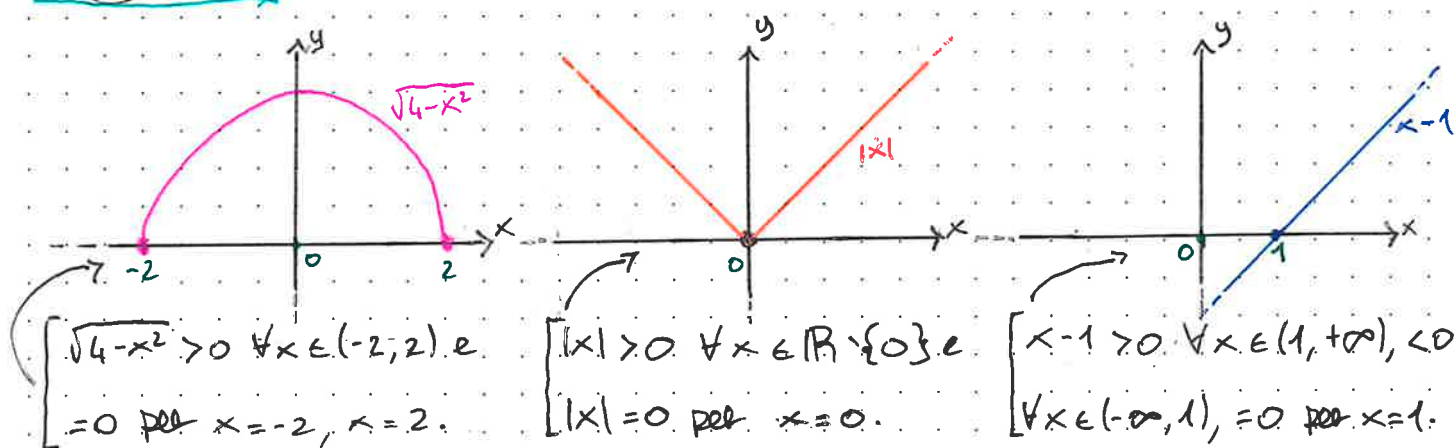


Si noti che anche in questo caso $x=3$ è un punto con tangente orizzontale a $G(x)$ e $x=0$ è un punto con tangente verticale a $G(x)$.

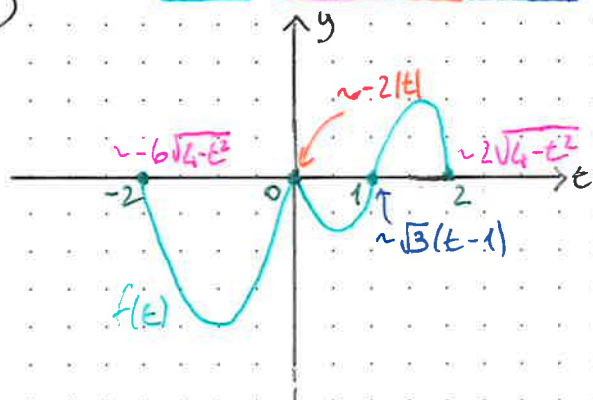
Esercizio 6:

Tracciare un grafico qualitativo di $F(x) = \int_1^x \sqrt{4-t^2} |t| (t-1) dt$.

Svolgimento:



Di conseguenza $f(t) = \sqrt{4-t^2} |t| (t-1)$ è rappresentabile come



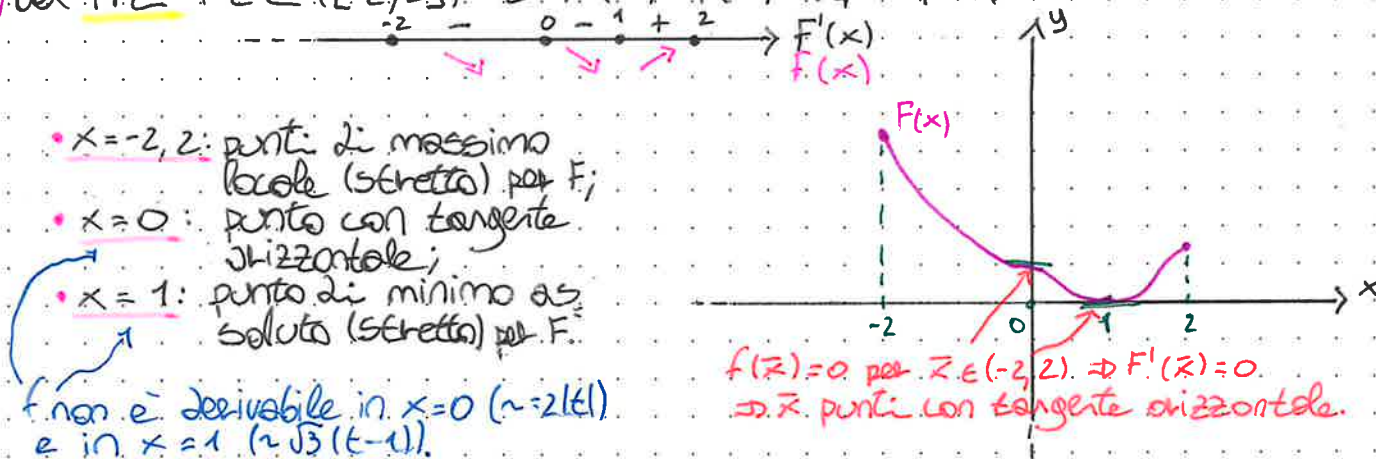
Osserviamo:

- $f(t) > 0$ su $(1, 2)$;
- $f(t) < 0$ su $(-2, 0) \cup (0, 1)$;
- $f(t) = 0$ per $t = \pm 2, 0, 1$.

Inoltre $\text{dom } f = [-2, 2] \Rightarrow \text{dom } F = [-2, 2]$.

Per quanto riguarda $F(x)$ sappiamo:

- $F(1) = 0$, $F(x) > 0 \quad \forall x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$;
- $f \in \mathcal{C}^0([-2, 2]) \Rightarrow F \in \mathcal{C}^1([-2, 2]) \Rightarrow F$ non ammette asintoti (ammette min/max);
- da TFC $F \in \mathcal{C}^1([-2, 2])$ e $F'(x) = f(x) = \sqrt{4-x^2} |x| (x-1)$.



NOTA: tralasciamo lo studio di convessità/concavità di F .

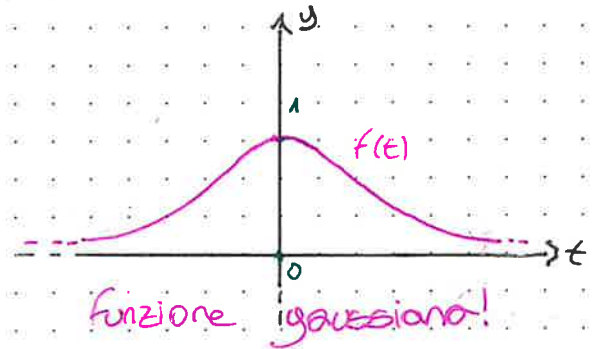
Esercizio 7: *Per i fisici nella prossima lezione!*

Sia $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$.

- Tracciare un grafico qualitativo di F , determinando, in particolare quanti sono i punti critici.
- Determinare $P_{3,0}(x)$ di $F(x)$.
- Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} F(x)$.

Solgimento:

a) $f(t) = e^{-t^2} > 0 \forall t \in \mathbb{R}$, continua



• Segno di F : $F(x) < 0 \Leftrightarrow x > x^2 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

Inoltre $F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$ e $F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$.



• Limiti di F : $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\int_x^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$
 $\Rightarrow y = \sqrt{\pi}$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\int_0^x e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \right] = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0$
 $\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$.

• Derivabilità: f continua, x e x^2 derivabili.

Da TFC "generalizzato" segue che $F'(x) = e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2} \cdot 1$,

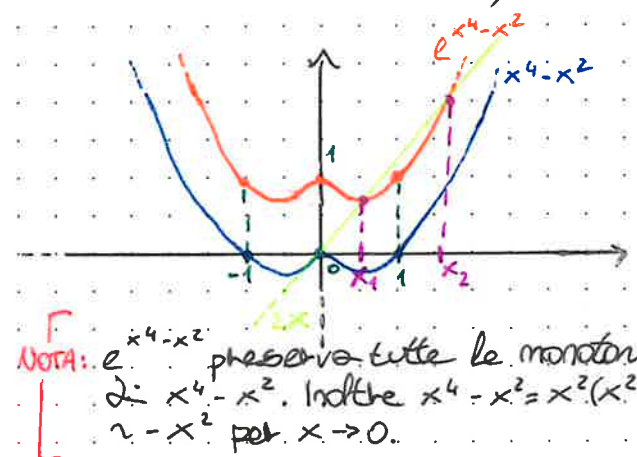
ossia $F'(x) = e^{-x^4} (2x - e^{x^4 - x^2})$.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = e^{x^4 - x^2}$

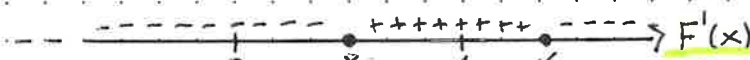
dal disegno $\Rightarrow \exists x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, +\infty)$:

$F'(x_i) = 0$ per $i = 1, 2$.

Ovvero ci sono 2 punti critici per F .

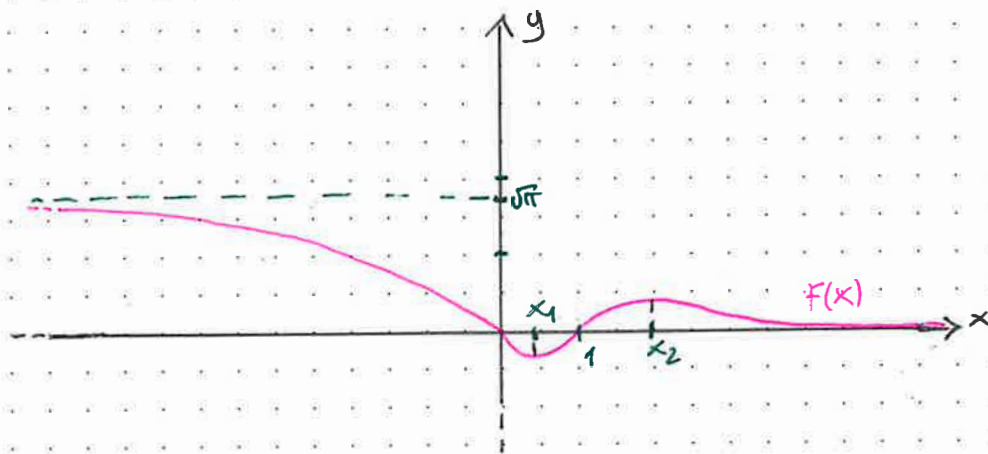


NOTA: $e^{x^4 - x^2}$ conserva tutte le monotonicità di $x^4 - x^2$. Inoltre $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) \sim -x^2$ per $x \rightarrow 0$.



punto di minimo locale (stretto) per F !

punto di massimo locale (stretto) per F !



b) $F(0) = 0$, $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$
 $F'(0) = -1$, $F''(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4e^{-x^4} + 2xe^{-x^2}$
 $F''(0) = 2$, $F'''(x) = -8x^3e^{-x^4} - 32x^3e^{-x^4} + 32x^7e^{-x^4} + 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2}$
 $F'''(0) = 2$

Quindi

$$\begin{aligned}
 P_{3,0}(x) &= F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{2} + F'''(0)\frac{x^3}{6} \\
 &= -x + x^2 + \frac{x^3}{3}
 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{e^{-x^2}} \left[\frac{0}{0} \right]$

Cerchiamo di applicare il teorema di de L'Hôpital:

$$\frac{F'(x)}{(e^{-x^2})'} = \frac{e^{-x^4} \cdot 2x - e^{-x^2}}{-2xe^{-x^2}} = \frac{e^{-x^4-x^2} \cdot 2x - 1}{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Quindi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} F(x) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{(e^{-x^2})'} = 0$