

Esercizio 1:

Risolvere il seguente problema di Cauchy (PDC)

$$\begin{cases} y' = -\frac{x}{y}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Osserviamo che ogni soluzione y sarà tale che $y(x) \neq 0 \forall x$. c.e.

Integrale generale:

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y' y = -x \Rightarrow \text{variabili separabili.}$$

$$\Rightarrow \int y'(x) y(x) dx = - \int x dx.$$

Definiamo $t = y(x)$ e $dt = y'(x) dx$, quindi otteniamo

$$\left(\int t dt \right)_{t=y(x)} = - \int x dx \Rightarrow \left(\frac{t^2}{2} \right)_{t=y(x)} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

$$\text{ovvero } \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

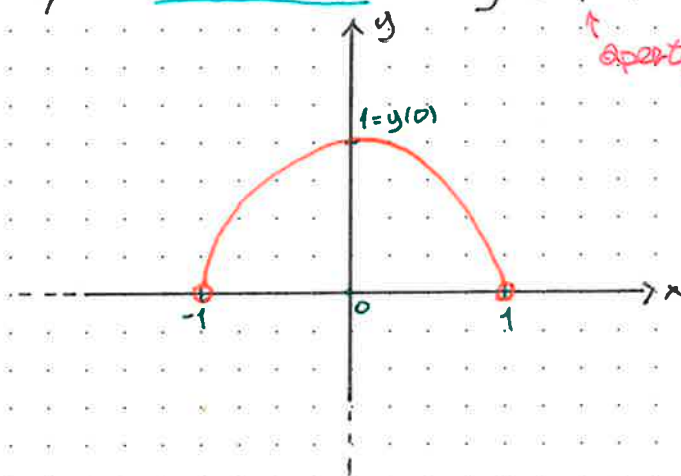
Condizione iniziale:

$$y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = C.$$

Quindi otteniamo $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = -x^2 + 1$, le cui soluzioni sono $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ (ACCETTABILE, $y(0)=1$) e $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$ (NON ACC., $y(0)=-1$).

In conclusione, la soluzione è $y: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $y(x) = \sqrt{1-x^2}$

↑ aperto poiché c.e. $y(x) \neq 0 \forall x$.



Esercizio 2:

Determinare l'integrale generale di
 $(x^2+1)y' + y^2 = 0$.

Successivamente risolvere il seguente PDC

$$\begin{cases} (x^2+1)y' + y^2 = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

- Osserviamo che $x^2+1 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluzioni costanti:

$$y' = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{y(x) \equiv 0}.$$

Soluzioni non costanti: per il teorema di Cauchy ogni soluzione diversa da $y(x) \equiv 0$ è $\neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Dall'equazione di potenza otteniamo (variabili separabili)

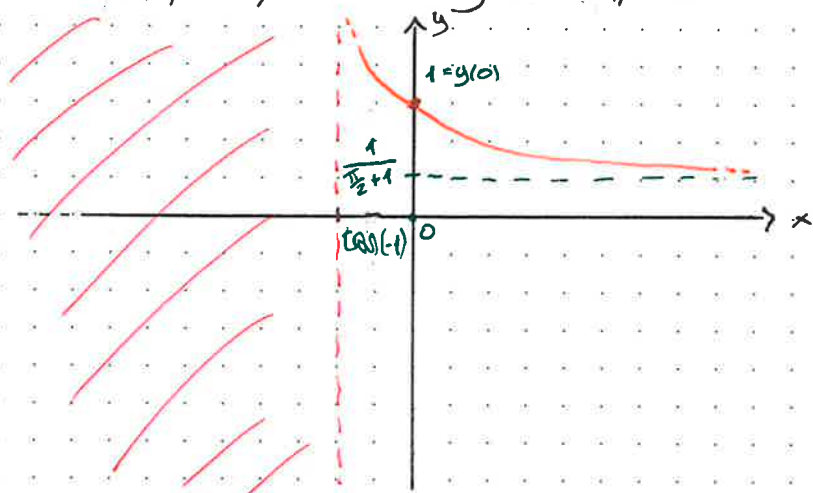
$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = - \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

da cui ricaviamo l'equazione $-\frac{1}{y} = -\arctan(x) + C$.

Quindi la soluzione è $y_c(x) = \frac{1}{\arctan(x) + C}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Per risolvere il PDC imponiamo la C.I. $y(0) = 1$ e otteniamo
 $\frac{1}{C} = 1 \Rightarrow C = 1$.

La soluzione del PDC è quindi $y(x) = \frac{1}{\arctan(x) + 1}$ con
 $\text{dom}(y) = (\tan(-1), +\infty)$, ovvero $y: (\tan(-1), +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.



NOTA: Non consideriamo il dominio con $(-\infty, \tan(-1))$ poiché la x della C.I. è $\in (\tan(-1), +\infty)$.

Esercizio 3:

Determinare l'integrale generale di

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} y(x).$$

Svolgimento:

Il dominio naturale è $\text{dom}(y) = (-1, +\infty)$.

Soluzioni costanti:

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} y = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0.$$

Soluzioni non costanti: come prima $y(x) \neq 0 \forall x \in \text{dom}(y)$.

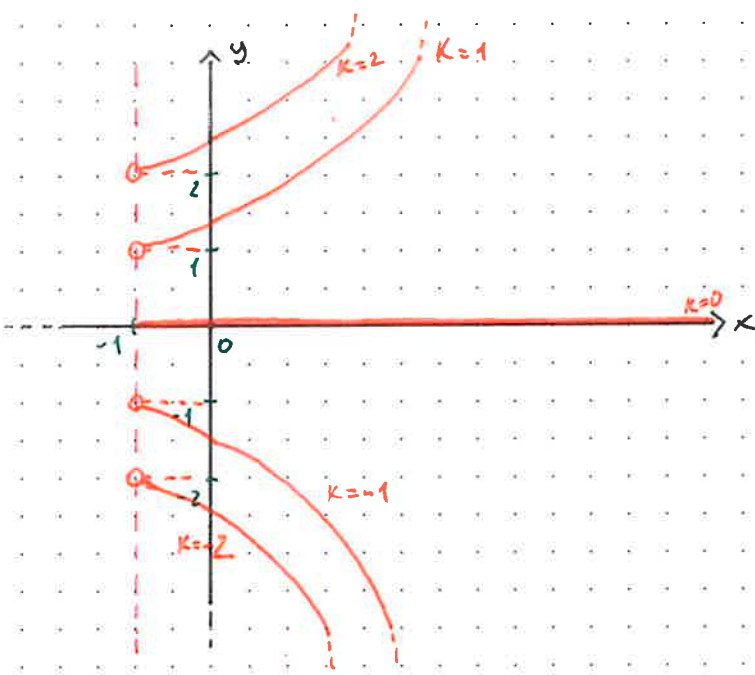
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \log|y| = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

variabili separabili $\Rightarrow |y| = e^{2\sqrt{x+1}} \cdot e^c \Rightarrow y(x) = k e^{2\sqrt{x+1}}, \quad k \in \mathbb{R}, k \neq 0.$
 $\swarrow y \neq 0 \Rightarrow y < 0 \vee y > 0 \quad \searrow e^c \neq 0$

Le soluzioni in generale si possono scrivere come

$$y_k: \{x > -1, x \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y_k(x) = k e^{2\sqrt{x+1}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$\leftarrow 0$ compreso per avere anche $y(x) \equiv 0$.



Esercizio 4:

a) Determinare l'integrale generale di $y' = xy^2$:

Soluzioni costanti: $y' = 0 \Rightarrow xy^2 = 0 \forall x \Rightarrow y(x) \equiv 0$.

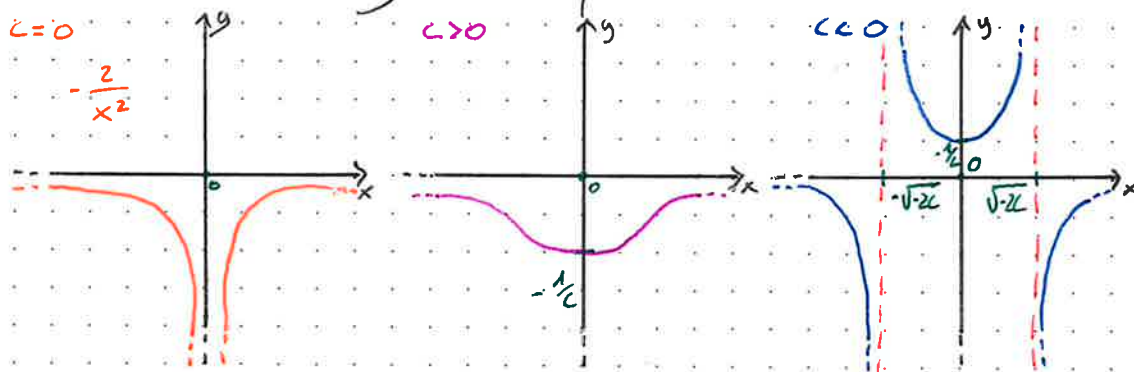
Soluzioni non costanti: sempre con $y(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{y'}{y^2} = x \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

← variabile separabili

$$\Rightarrow y_C(x) = -\frac{2}{x^2 + 2C}, C \in \mathbb{R}.$$

b) Rappresentare un grafico qualitativo delle soluzioni $y(x) \neq 0 \forall x$:



$$y_0: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{x^2}$$

$$y_C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{x^2 + 2C}$$

$$y_C: \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{-2C}\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{2}{x^2 + 2C}$$

c) Risolvere i seguenti PDL:

$$\begin{cases} y' = xy^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\downarrow \\ y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{2}{2C} \\ \Rightarrow C = -1 < 0.$$

$$y_{-1}: (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$y_{-1}(x) = -\frac{2}{x^2 - 2}.$$

$$\begin{cases} y' = xy^2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\downarrow \\ y(0) = -1 \Rightarrow -1 = -\frac{2}{2C} \\ \Rightarrow C = 1 > 0.$$

$$y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } y_1(x) = -\frac{2}{x^2 + 2}.$$

NOTA: Nel primo PDL otteniamo $C < 0$, quindi il dominio corrispondente può essere, in base alla C.I.:

- $\text{dom}(y_{-1}) = (-\infty, -\sqrt{2})$,
- $\text{dom}(y_{-1}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\Rightarrow$ scegliamo questo in quanto la x della C.I. è in esso ($y(0) = 1 \Rightarrow 0 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$).
- $\text{dom}(y_{-1}) = (\sqrt{2}, +\infty)$.

Esercizio 5:

Risolvere il seguente PDL

$$\begin{cases} y' - y = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento:

Osserviamo che è una equazione differenziale ordinaria lineare (ODE) del 1° ordine, cioè del tipo $y' = a(x)y + b(x)$. Nel nostro caso abbiamo $a(x) \equiv 1$ e $b(x) \equiv 1$.

Memo:

In generale, la soluzione di questa ODE è della forma

$$y(x) = e^{A(x)} \left(C + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right),$$

dove $A(x) = \int a(x) dx$.

Per noi $A(x) = \int 1 dx = x$, quindi otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= e^x \left(C + \int e^{-x} dx \right) \\ &= e^x (C - e^{-x}) \\ &= Ce^x - 1. \end{aligned}$$

Imponiamo la c.i. $y(0) = 0$:

$$0 = C - 1 \Rightarrow C = 1.$$

Di conseguenza la soluzione è $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$y(x) = e^x - 1.$$

Esercizio 6:

Risolvere il seguente PDC

$$\begin{cases} y' = \sin x \cdot y + \sin 2x, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Svolgimento:

Siamo di nuovo in presenza di una ODE lineare del primo ordine con $a(x) = \sin x$ e $b(x) = \sin 2x$.

Quindi in questo caso otteniamo

$$A(x) = -\cos x \quad \text{e} \quad y(x) = e^{-\cos x} \left(C + \int \sin 2x e^{\cos x} dx \right)$$

Troviamo una primitiva di $\sin 2x \cdot e^{\cos x}$:

$$\begin{aligned} \int \sin 2x e^{\cos x} dx &= 2 \int \sin x \cos x e^{\cos x} dx \\ \cos x = s, ds &= -\sin x dx \quad \Bigg| \quad = -2 \int s e^s ds = -2 \left[s e^s - e^s \right] \\ &= -2 s e^s + 2 e^s = -2 \cos x e^{\cos x} + 2 e^{\cos x}. \end{aligned}$$

Quindi

$$y(x) = C e^{-\cos x} - 2 \cos x + 2.$$

Imponiamo la C.I. $y(0) = -2$:

$$-2 = C e^{-1} - 2 + 2 \Rightarrow C = -2e.$$

Di conseguenza la soluzione è $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$y(x) = -2e^{-\cos x + 1} - 2 \cos x + 2.$$

Esercizio 7:

Risolvere il seguente PDE

$$\begin{cases} y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \log(1+x^2), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento:

Siamo nuovamente in presenza di una ODE lineare del primo ordine con $a(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ e $b(x) = \log(1+x^2)$.

Troviamo $A(x)$:

$$A(x) = \int -\frac{2x}{1+x^2} dx = -\log(1+x^2).$$

Quindi l'integrale generale diventa

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(C + \int \log(1+x^2)(1+x^2) dx \right).$$

Troviamo una primitiva di $\log(1+x^2)(1+x^2)$:

$$\begin{aligned} \int \log(1+x^2)(1+x^2) dx &= \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3}\right) \log(1+x^2)}_I - \int \frac{2x^2 + \frac{2}{3}x^4}{1+x^2} dx \\ &= I - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx \\ &= I - 2 \int \frac{x^2+1}{1+x^2} dx + 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{x^4-1}{1+x^2} dx - \frac{2}{3} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= I - 2x + 2 \arctan x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \arctan x \\ &= I - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \arctan x - \frac{2}{9}x^3. \end{aligned}$$

Imponiamo la C.I. $y(0) = 1$:

$$1 = C + 0 \Rightarrow C = 1.$$

Di conseguenza la soluzione è $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} \left(1 + \left(x + \frac{x^3}{3}\right) \log(1+x^2) - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \arctan x - \frac{2}{9}x^3 \right).$$

Esercizio 8:

Sia $x \rightarrow y(x)$ la soluzione del seguente PDC

$$\begin{cases} y' = y^2 - x^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Studiare $y(x)$ in un intorno di $x_0 = 0$.

Svolgimento:

Non possiamo risolvere il PDC visto che è del secondo ordine, come possiamo fare?

Possiamo scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine associato a $y(\cdot)$ centrato in $x_0 = 0$:

- $y(0) = 1$,
- $y'(0) = ? \Rightarrow y'(0) = y(0)^2 - 0^2 = 1$,
- $y''(0) = ? \Rightarrow y''(x) = (y^2 - x^2)' = 2yy' - 2x$
 $\Rightarrow y''(0) = 2y(0)y'(0) - 2 \cdot 0 = 2$.

Quindi otteniamo che in un intorno di $x_0 = 0$ $y(x)$ si comporta come

$$P_{x_0=0;2}(x) = 1 + x + x^2 \quad \text{con un resto (di Peano) di } O(x^2).$$

Esercizio 9

Data l'eq. differenziale $y'' - 4y' + 3y = 3x^2$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1$, determinate $y(0)$

- cerchiamo l'integrale generale dell'omogenea associata ($y'' - 4y' + 3y = 0$): otteniamo

$$\left(z^2 - 4z + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \vee z = 3 \right) \Rightarrow c_1 e^x + c_2 e^{3x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \text{è soluzione dell'omogenea}$$

- METODO DI SIMILARITÀ** per cercare una soluzione particolare: poniamo $\bar{y}(x) = \bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}$

$$\Rightarrow y'(x) = 2\bar{a}x + \bar{b} \quad \text{e} \quad y''(x) = 2\bar{a}$$

$$\Rightarrow 2\bar{a} - 4(2\bar{a}x + \bar{b}) + 3(\bar{a}x^2 + \bar{b}x + \bar{c}) = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\bar{a} = 3 \\ -8\bar{a} + 3\bar{b} = 0 \\ 2\bar{a} - 4\bar{b} + 3\bar{c} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{a} = 1 \\ \bar{b} = \frac{8}{3} \\ \bar{c} = \frac{26}{9} \end{cases}$$

- l'integrale generale è: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x)e^{-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[c_1 + c_2 e^{2x} + e^{-x} \left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \right) \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad c_1 = 1 \quad \text{e} \quad c_2 = 0$$

$$\bullet \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y(x) = e^x + x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{26}{9} \\ y(0) = 1 + \frac{26}{9} = \frac{35}{9} \end{cases}$$

Esercizio 10

Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale generale di $y'' + y = \cos(\alpha x)$ è costituito da funzioni illimitate su $\mathbb{R}$?

- l'eq. associata all'omogenea è $z^2 + 1 = 0 \leadsto z = \pm i$

$\Rightarrow$ l'integrale generale dell'omogenea è $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- dal metodo di similarità, $f(x) = \cos(\alpha x) \Rightarrow \xi = 0 + \alpha i$ è radice con molteplicità 1 per $\alpha = \pm 1$

$\Rightarrow$ soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = x(\bar{a} \cos(x) + \bar{b} \sin(x))$ con $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \bar{y}'(x) = x(-\bar{a} \sin x + \bar{b} \cos x) + \bar{a} \cos x + \bar{b} \sin x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}''(x) = x(-\bar{a} \cos x - \bar{b} \sin x) - \bar{a} \sin x + \bar{b} \cos x - \bar{a} \sin x + \bar{b} \cos x = -\bar{y}(x) - 2\bar{a} \sin x + 2\bar{b} \cos x \end{array} \right.$$

$$\text{e } \bar{y}''(x) + \bar{y}(x) = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2\bar{b} = 1 \\ -2\bar{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \bar{y}(x) = \frac{1}{2} x \sin(x)$$

- per $\alpha = 1$ o $\alpha = -1$, l'integrale generale è dato da $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{x}{2} \sin(x)$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

che è una funzione illimitata su $\mathbb{R}$

"FENOMENO DI RISONANZA"

- N.B. non è necessario determinare esplicitamente $\bar{y}$ per trovare gli α , bastava fermarsi

$$\text{a } \bar{y}(x) = x(\bar{a} \cos(x) + \bar{b} \sin(x)) \quad \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$$