

Esercizio 1:

Siano

I) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

e

II) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0, \\ \sqrt{x+4} & x > 0. \end{cases}$

- Discutere iniettività e suriettività.
- Trovare, dove possibile, la funzione inversa.
- Rappresentare f, g, f^{-1} e g^{-1} .
- Determinare $f^{-1}((-1, 1))$.

Solgimento:

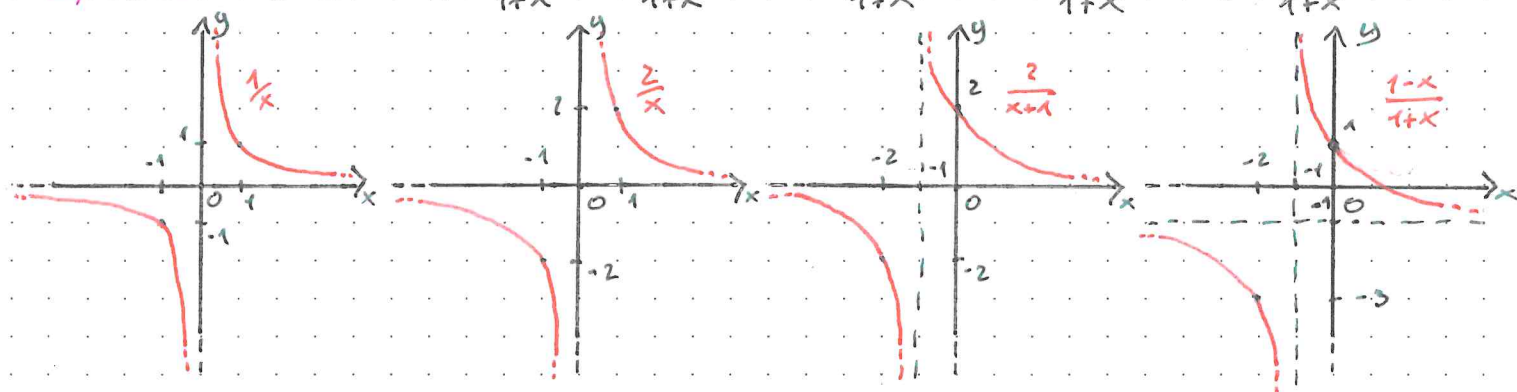
I)

- Dell'esercizio 2 della scorsa settimana sappiamo che $f(x)$ è iniettiva e suriettiva (quindi biettiva) solo se restringiamo il codominio a $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- $f^{-1}(x)$ esiste se prendiamo $\text{Codom}(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vedi punto a). In questo caso $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$.

NOTA: in questo esempio $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} f(x) = f^{-1}(x)$.

c) Osservo che $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} = 1 - \frac{2x+2-2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$



d) $f^{-1}((-1, 1)) = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : f(x) \in (-1, 1)\}$.

Risolvere $-1 < f(x) < 1$:

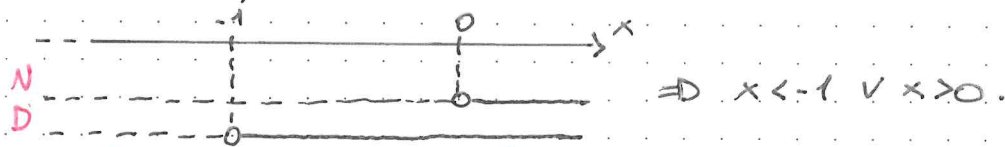
- $-1 < f(x) \Leftrightarrow -1 < -x + \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.
- $f(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} < 2 \Leftrightarrow \frac{2-2x-2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x+1} < 0$.

Quindi abbiamo

$$N: 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$$

$$D: x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1,$$

ovvero



Infine abbiamo $(x < -1 \vee x > 0) \wedge x > -1 \Leftrightarrow x > 0$, cioè

$$f^{-1}((-1, 1)) = (0, +\infty).$$

II)

a) iniettività: Osservo che $g(x) < 2$ se $x < 0$ e $g(x) > 2$ se $x > 0$.

Poiché se $x < 0$ e $y > 0$ (o viceversa) ottengo sicuramente $g(x) \neq g(y)$ ($g(x) < 2 < g(y)$ o viceversa).

Ho, quindi, che casi possibili, siano $x, y \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) = g(y)$

$$\bullet x = y = 0, \text{ da cui } x+2 = 2 = y+2 \Rightarrow \text{iniettività};$$

$$g(x) = x+2 \text{ se } x < 0 \leftarrow x, y < 0, \text{ da cui } x+2 = y+2 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{iniettività};$$

$$g(x) = \sqrt{x+4} \text{ se } x > 0 \leftarrow x, y > 0, \text{ da cui } \sqrt{x+4} = \sqrt{y+4} \Rightarrow x+4 = y+4 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{iniettività}$$

$\Rightarrow g(x)$ è iniettiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suriettività: Abbiamo anche qui che casi (vedi sopra), sia $y \in \mathbb{R}$

$$\bullet y = 2 \Leftrightarrow g(0) = 2 \Leftrightarrow x = 0;$$

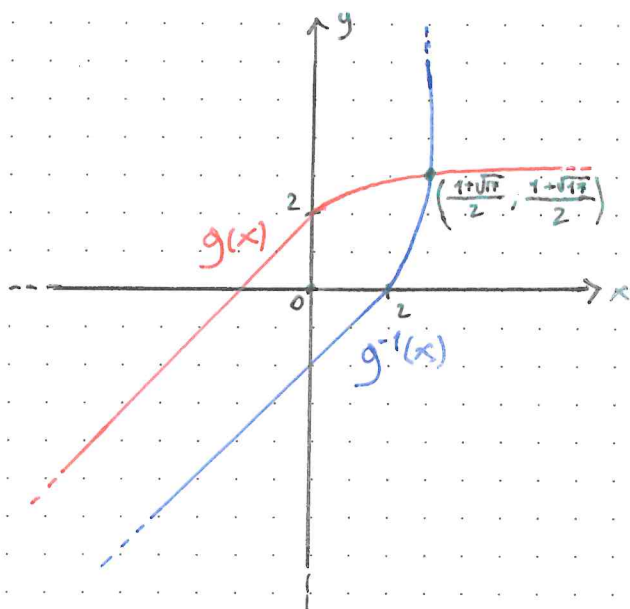
$$\bullet y > 2 \Leftrightarrow g(x) = \sqrt{x+4} = y \Leftrightarrow y^2 = x+4 \Leftrightarrow x = y^2 - 4;$$

$$\bullet y < 2 \Leftrightarrow g(x) = x+2 = y \Leftrightarrow x = y-2$$

$\Rightarrow g(x)$ è suriettiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Essendo g biettiva e invertibile con $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \geq 2, \\ x - 2 & \text{se } x < 2. \end{cases}$

c)



Nota: In questo caso g e g^{-1} sono simmetriche rispetto a $y=x$ e coincidono solo in un punto.

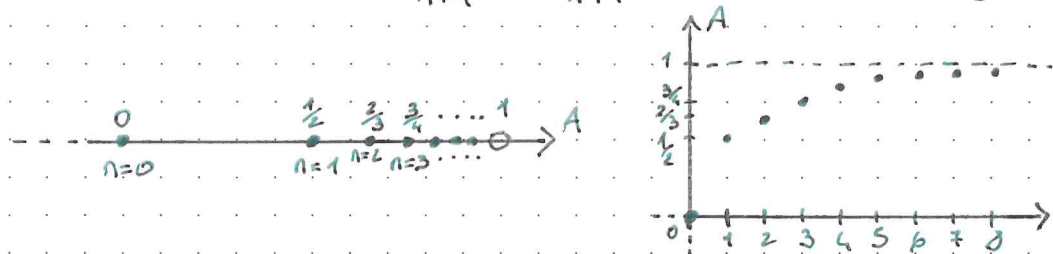
Esercizio 2:

Determinare $\sup$, $\inf$, $\max$ e $\min$ dei seguenti insiemi:

- $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;
- $B = \left\{ 2(-1)^n - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$;
- $C = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}_{>0}, 0 < m < n \right\}$.

Svolgimento:

a) Osserviamo che $\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow A = \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.



A è limitato inferiormente e superiormente.

- Poiché $0 \in A$ e $\frac{n}{n+1} \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\inf A = \min A = 0$.
- Dimostriamo ora che $\sup A = 1$: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ c.c.

qui stiamo usando la proprietà di Archimedeo!

$$1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow 1 \leq n\varepsilon + \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \text{ (vero, cioè } \exists n_\varepsilon \text{)}.$$

Osservazione:

Supponiamo $\sup A = 2 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ c.c. $1 - \frac{1}{n+1} \geq 2 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon - 1$
 $\Leftrightarrow 1 \leq n\varepsilon + \varepsilon - n - 1 \Leftrightarrow (n-1)\varepsilon \geq 2 - \varepsilon$,
 prendiamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e otteniamo $-\frac{1}{2}n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$ FALSO!

$$b) B = \underbrace{\left\{ 2 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \text{ pari} \right\}}_{B'} \cup \underbrace{\left\{ -2 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ dispari} \right\}}_{B''}.$$

Osserviamo che $\forall x \in B'$ e $\forall y \in B''$ $x > y$. Quindi per il $\sup$ guardiamo B' e per l' $\inf$ guardiamo B'' .

- Proviamo che $\sup B' = 2$ (quindi $\sup B = 2$). Inoltre dato che $2 \notin B'$, $2 \notin B \Rightarrow \nexists \max B$. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $2 - \frac{1}{2n} \geq 2 - \varepsilon$
 $\Leftrightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{2n} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} = n_\varepsilon$.
- $\forall n$ dispari notiamo che $-2 - \frac{1}{2 \cdot 1} \leq -2 - \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \geq 1$,
 che è vero per definizione di B'' . Quindi $\inf B = \inf B'' = -\frac{5}{2}$.
 Inoltre, dato che $-\frac{5}{2} \in B'' \subset B$, $\min B = \inf B = -\frac{5}{2}$.

c) Da $m < n$ segue che $\frac{n}{m} > 1 \Rightarrow 1$ è minorente.

Inoltre abbiamo che

- il più piccolo rapporto $\frac{n}{m}$ con $0 < m < n$ è: fissato n prendere

$m = n - 1$. Di conseguenza avremo che

$1 \notin C \Rightarrow \nexists \min$

$$\left\{ \frac{n}{n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \right\} = \left\{ 1 + \frac{1}{n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \right\} \subsetneq C \Rightarrow \underline{\inf C = 1};$$

- fissando $m=1$, possiamo prendere tutti gli $n \geq 2$, cioè

$$\{n : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\} \subsetneq C \Rightarrow \underline{\sup C = +\infty}.$$

↑
ovviamente $\nexists \max C$ dato che è illimitato superiormente!

Esercizio 3:

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \alpha \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f \geq \alpha.$$

Svolgimento:

Se $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq \alpha$, allora α è un minorente. Da definizione $\inf_{\mathbb{R}} f$ è il massimo dei minorenti. Quindi la tesi. 

NOTA: $\inf_{\mathbb{R}} f = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Inoltre l'esercizio precedente funziona anche per $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

In tal caso avremo per $\alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \geq \alpha \Rightarrow \inf f = \inf_{x \in A} f(x) \geq \alpha$.

Esercizio 4:

← come sopra vale anche per $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni distinte. Dimostrare che

a) per f e g limitate inferiormente, $\inf_{\mathbb{R}} (f+g) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$;

NOTA: una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}: \forall x \in A f(x) \geq m$.

b) per f e g limitate superiormente, $\sup_{\mathbb{R}} (f+g) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g$.

NOTA: una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in A f(x) \leq M$.

Svolgimento:

← per usare questo risultato ci serve la limitatezza

a) Grazie all'esercizio precedente basta dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$. $f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g \in \mathbb{R}$ da limitatezza inferiore $\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} (f+g) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$.

Dato che per definizione di $\inf \forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f$ e $g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} g$, allora $f(x) + g(x) \geq \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$. Da cui la tesi.

Osservazione:

In generale non è vero che $\inf_{\mathbb{R}} (f+g) = \inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g$.

Controesempio: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$ e $g(x) = -f(x)$.

Allora $\inf_{\mathbb{R}} f = -1$ e $\inf_{\mathbb{R}} g = 0$, quindi $\inf_{\mathbb{R}} f + \inf_{\mathbb{R}} g = -1$, ma $\inf_{\mathbb{R}} (f+g) = \inf_{\mathbb{R}} (f-f) = 0 > -1$. 

6) Analogamente all'esercizio 3 si può dimostrare che

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} f \leq \alpha. \quad \star$$

Dopo ciò si procede come al punto a):

sapendo che $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} f$ e $g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} g$, ^{$\in \mathbb{R}$ da limitatezza superiore} otteniamo

$$f(x) + g(x) \leq \sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \text{Da cui per } \star$$

otteniamo la tesi.

Esercizio 5:

Determinare $\sup\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, dove $f(x) = e^{-x} - 2$.

Svolgimento:

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$, osservo che $A = f^{-1}((0, +\infty))$.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 2 \Leftrightarrow e^{-x} > e^{\log(2)} \Leftrightarrow x < -\log(2).$$

Allora possiamo affermare che $-\log(2)$ è un maggiorante per A .

Per dimostrare che $-\log(2)$ è il sup uso:

$$\forall \delta > 0 \exists x_\delta \in A : x_\delta > -\log(2) - \delta. \star$$

Fissiamo $\delta > 0$ e scegliamo $x_\delta = -\log(2) - \frac{\delta}{2}$.

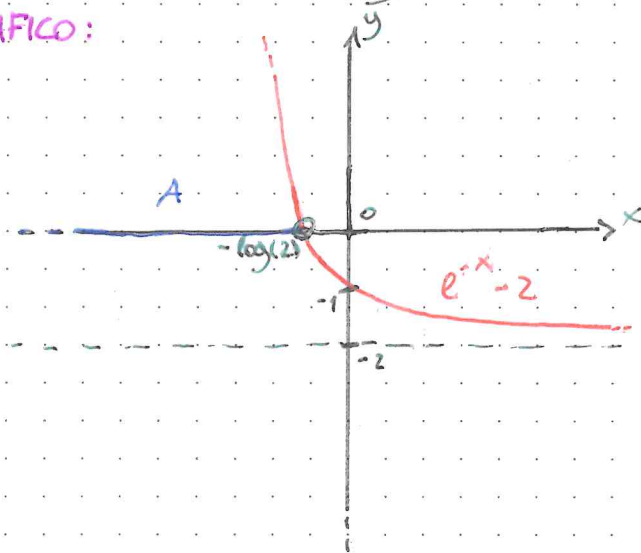
- Verifichiamo $f(x_\delta) > 0$: $f(x_\delta) = e^{\log(2) + \frac{\delta}{2}} - 2 = 2e^{\frac{\delta}{2}} - 2 > 0$;

- Verifichiamo $\star$:

$$-\log(2) - \frac{\delta}{2} > -\log(2) - \delta \Leftrightarrow \frac{\delta}{2} > 0 \Leftrightarrow \delta > 0, \text{ vero!}$$

Quindi $\sup A = -\log(2)$.

GRAFICO:



NOTA: Attenzione a non confondere $\inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ con $\inf_{\mathbb{R}^+} f = \inf_{x \in \mathbb{R}^+} f(x)$.

Il primo è un sottoinsieme del dominio, il secondo è un sottoinsieme dell'immagine.

Esercizio 6:

$\hookrightarrow A$ ha un numero finito di elementi.

$A \subseteq \mathbb{R}$ di cardinalità finita $\Rightarrow \sup A = \max A$.

Svolgimento:

Dimostriamo che $\sup A \in A$ ($\Leftrightarrow \sup A = \max A$).

Per assurdo: $\sup A \notin A$.

Per definizione di $\sup$ abbiamo che $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in A$ t.c. $x_n \geq \sup A - \frac{1}{n}$.

Allora possiamo osservare che abbiamo costruito $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

infinito (poiché per infiniti $n \in \mathbb{N} \exists x_n$). Però $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$

per costruzione e al contempo A è finito $\Rightarrow$ assurdo.

Vale quindi la tesi.

Esercizio 1:

Dimostrate le seguenti disuguaglianze

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \stackrel{a)}{\leq} \sqrt{ab} \stackrel{b)}{\leq} \frac{a+b}{2} \stackrel{c)}{\leq} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

media armonica media geometrica media aritmetica media quadratic

a) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1 \Leftrightarrow$ vale b).

b) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, che vale sempre.

NOTA: Nel medesimo modo si dimostra che $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, basta spezzare il modulo: $2ab \leq a^2+b^2$ per $a \cdot b \geq 0$ e $-2ab \leq a^2+b^2$ per $a \cdot b < 0$.

Significato geometrico ($4\sqrt{ab} \leq 2(a+b)$):



$$P = 2(a+b) \geq P = 4\sqrt{ab}$$

$$A = ab = A = ab$$

$\Rightarrow$ La disuguaglianza afferma che fra i rettangoli aventi stesso area il quadrato è quello con perimetro minore.

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0, \text{ che vale sempre.}$$