

Esercizio 1:

Calcolare $\inf$, $\sup$, $\min$, $\max$ delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $D = \mathbb{R}$,

ii) $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $D = \mathbb{R}$,

iii) $h(x) = \arccos(x) - \arcsin(x)$, $D = [-1, 1]$.

Svolgimento:

i) $f(x) = (x^2 - 1)^2$. Siccome è una potenza pari $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, da cui $\inf_{\mathbb{R}} f \geq 0$. Inoltre $f(\pm 1) = 0$ (cioè $0 \in \text{Im } f$) $\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} f = \min_{\mathbb{R}} f = 0$.

Ora mostriamo $\sup_{\mathbb{R}} f = +\infty$ (quindi $\nexists \max$) $\Rightarrow \forall M \geq 0 \exists x \in \mathbb{R} : f(x) > M$.

Fissiamo $M > 0$, $(x^2 - 1)^2 > M \Rightarrow x^2 > \sqrt{M} + 1 \Rightarrow x > \sqrt{\sqrt{M} + 1} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$.

ii) Osserviamo che $g(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ e $g(x) < 0$ se $x < 0$, inoltre si ha $g(-x) = -\frac{x}{1+x^2} = -g(x) \Rightarrow g$ è una funzione dispari, ovvero è simmetrica rispetto all'origine degli assi $\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}_{\geq 0}} g = -\inf_{\mathbb{R}} g = -\inf_{\mathbb{R}_{\leq 0}} g$.

Sappiamo che $g(1) = \frac{1}{2}$, dimostriamo che $g(x) \leq \frac{1}{2} \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{x+x^2+1-x-x^2-1+x}{1+x^2} = \frac{x^2+1-x-(x-1)^2}{x^2+1} = 1 - \frac{x}{1+x^2} - \underbrace{\frac{(x-1)^2}{1+x^2}}_{>0} \leq 1 - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow 2 \frac{x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

Quindi $\min_{\mathbb{R}} g = \inf_{\mathbb{R}} g = -\frac{1}{2}$ e $\max_{\mathbb{R}} g = \sup_{\mathbb{R}} g = \frac{1}{2}$.

iii) Osserviamo che sia la funzione $\arccos(x)$ che $-\arcsin(x)$ hanno minimo in $x=1$, quindi

$$\inf_D h = \min_D h = h(1) = \arccos(1) - \arcsin(1) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{dato che } \underbrace{\arccos(x) - \arcsin(x)}_{\substack{\geq -\frac{\pi}{2} \\ \leq \frac{\pi}{2}}} \geq -\frac{\pi}{2} \quad \forall x \in D.$$

Analogamente hanno massimo per $x=-1$, quindi

$$\sup h = \max h = h(-1) = \arccos(-1) - \arcsin(-1) = \pi - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\text{dato che } \underbrace{\arccos(x) - \arcsin(x)}_{\substack{\geq \frac{\pi}{2} \\ \leq \frac{3}{2}\pi}} \leq \frac{3}{2}\pi \quad \forall x \in D.$$

MEMO - Limite finito:

Sia $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per X .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x \in X, 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Cio' vuol dire che $\forall$ intorno di L , $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, $\exists$ un intorno di x_0 , $(x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap X \setminus \{x_0\}$, $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

NOTA: Vi sono diversi modi per denotare δ_ε , per esempio $\delta(\varepsilon)$ o δ . In quest'ultimo caso si omette la dipendenza da ε , che è, però, sottintesa dall'ordine dei quantificatori ($\forall \varepsilon \exists \delta$).

Esercizio 2:

Dimostrare i seguenti limiti:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$

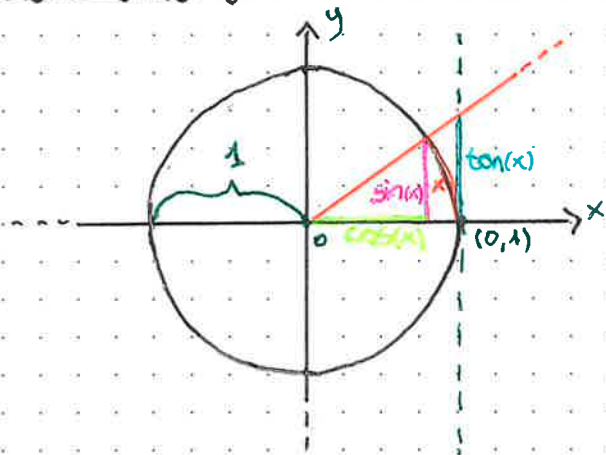
iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Svolgimento:

Ricordiamo la definizione di seno, coseno e tangente



• Osserviamo che, se $x > 0$,

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x).$$

• Inoltre valgono i seguenti limiti *← dimostrare per caso!*

a) f dispari, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$

b) f pari, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$

i) Visto a lezione (file 9Lez-15-10).

ii) Fisso $\varepsilon > 0$, osservo che per $x > 0$, $\cos x \leq 1$. *← il coseno è pari, basta dimostrare $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.*

$$\begin{aligned} \text{Allora } | \cos x - 1 | &= 1 - \cos x = 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Osserviamo che $2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} x^2$ (da i)).

Valiamo che, se $x < \delta$, allora $\frac{1}{2} x^2 < \varepsilon$.

Ma $\frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon^2$. Basta quindi scegliere $\delta_\varepsilon = \sqrt{2\varepsilon}$.

Allora otteniamo

$$x < \sqrt{2\varepsilon} \quad \leftarrow |x-0| < \delta_\varepsilon$$
$$\Rightarrow |\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

iii) e iv)

Dato che $\frac{\sin x}{x}$ e $\frac{\cos x}{x}$ sono funzioni pari, $\leftarrow$ Prodotto di due funzioni dispari, ragioniamo per $x > 0$ (come in ii)).

$$\text{Quindi } 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}, \text{ ovvero } \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Per ii) e il teorema del confronto si conclude iii).

$$\text{Inoltre } 1 \leq \frac{\cos x}{x} \text{ e da } \sin x \leq x \text{ segue che } \frac{\sin x}{\cos x} \leq \frac{x}{\cos x}.$$

$$\text{Ovvero } 1 \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

Per l'algebra dei limiti, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = (\lim_{x \rightarrow 0^+} 1) / (\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x) = 1$, e

per il teorema del confronto si conclude iv).

v) Osserviamo che

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} \right)^2.$$

Per l'algebra dei limiti e per iii) si conclude v).



Esercizio 3:

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1, \\ 1 & a = 1, \\ +\infty & a > 1, \\ \text{?} & a \leq -1. \end{cases}$

Svolgimento:

• Se $a=1$, $a^n = 1 \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

• Se $a=-1$, $a^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari}, \\ -1 & n \text{ dispari}. \end{cases}$ ← negazione def. Limite.

Quindi $\forall l \in \mathbb{R}$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall M > 0$, $\exists \bar{n} > M$, $|a^n - l| > \varepsilon$.

Se $l \geq 0$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fisso $M > 0$ e prendo $\bar{n} > M$ dispari. Allora

$$|a^n - l| = |l + 1| \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n.$$

Se $l < 0$, scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Fisso $M > 0$ e prendo $\bar{n} > M$ pari. Allora

$$|a^n - l| = |1 - l| > 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n.$$

• Se $a < -1$, per caso (si svolge similmente al punto precedente).

• Se $a=0$, $a^n = 0 \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

• Se $a \in (0, 1)$, osserviamo che $\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \exists b > 0$ t.c. $\frac{1}{a} = 1 + b$
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n = (1+b)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nb$. Overo $0 < a^n \leq \frac{1}{1+nb} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ per il thm. del confronto.

• Se $a \in (-1, 0)$, osserviamo che $-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ per il thm. del confronto.

• Se $a > 1$, allora $a = 1 + b$, $b > 0$. Quindi $a^n = (1+b)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + nb \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ per il thm. del confronto.

Esercizio 4:

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Svolgimento:

Sia $a_n = \sqrt[n]{n}$ e $b_n = \sqrt[n]{n}$ per $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

Poiché $a_n > 1$, allora $b_n > 1$.

Quindi

$\forall n \exists k_n > 0$ t.c. $b_n = 1 + k_n$,

inoltre notiamo che $b_n^n = \sqrt[n]{n}$, ottenendo

$$\sqrt[n]{n} = b_n^n = (1 + k_n)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n k_n \Rightarrow 1 + n k_n \leq \sqrt[n]{n}$$

$$\Rightarrow 0 < k_n \leq \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \stackrel{\text{lim. confronto } n \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0.$$

Di conseguenza otteniamo che

$$a_n = \sqrt[n]{n} = b_n^2 = (1 + k_n)^2 = (1 + k_n)(1 + k_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

per l'algebra dei limiti.

NOTA: Dagli esercizi precedenti possiamo dedurre tre "ingredienti" fondamentali nello studio dei limiti:

- i) l'algebra dei limiti,
- ii) la disuguaglianza di Bernoulli,
- iii) il teorema del confronto.

Esercizio 5:

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$.

Svolgimento:

• $a > 1$:

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k_n > 0 \text{ e.c.c. } \sqrt[n]{a} = 1 + k_n.$$

Quindi possiamo vedere che

$$a = (1 + k_n)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n k_n \Rightarrow 0 < k_n \leq \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$.

Da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + k_n) \stackrel{\substack{\text{algebra dei} \\ \text{limiti}}}{=} 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 1.$$

• $0 < a < 1$:

$$a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} > 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists k_n > 0 \text{ e.c.c. } \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1 + k_n.$$

Quindi possiamo stimare

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + k_n} \Rightarrow a = \frac{1}{(1 + k_n)^n} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \frac{1}{1 + n k_n} \Rightarrow 1 + n k_n \leq \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 0 < k_n \leq \frac{\frac{1}{a} - 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Per il teorema del confronto vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$.

Da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + k_n} \stackrel{\substack{\text{algebra dei} \\ \text{limiti}}}{=} 1.$$

• $a = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

