

Esercitazione Fisici e Matematici 29/10/24 e 30/10/24:

Esercizio 1:

Dimostrare la gerarchia degli infiniti:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} \quad \forall a > 1$: ← forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$.

$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > 1 \Leftrightarrow \exists k > 0: \sqrt{a} = 1 + k$.

Quindi $(\sqrt{a})^n = (1+k)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + kn > kn \Rightarrow a^n > k^2 n^2$.

$0 < \frac{n}{a^n} < \frac{n}{k^2 n^2} = \frac{1}{k^2 n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow n \ll a^n \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall a > 1$.
per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}, a > 1$:

• Caso $p \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{|p|} a^n} = 0$.

• Caso $p > 0$: ← forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$. dal punto a) dato che $\forall a > 1$.

• $p = k \in \mathbb{N}_{>0}$: $\frac{n^p}{a^n} = \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt{a}}\right)^k = \left[\frac{n}{(\sqrt{a})^n}\right]^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• $p \in \mathbb{R}_+$: $n^{LpJ} \leq n^p \leq n^{LpJ+1}$ (LpJ parte intera di p).

$\frac{n^{LpJ}}{a^n} \leq \frac{n^p}{a^n} \leq \frac{n^{LpJ+1}}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per il thm. del confronto $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$.
 $\swarrow$ $LpJ \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow$ da prima $\searrow$

$\Rightarrow n^p \ll a^n \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall p \in \mathbb{R}, a > 1$.

NOTA: per il teorema del limite delle funzioni composte

$(a_n)_n$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^p}{a^{a_n}} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b n)^p}{n^\alpha} = 0 \quad \forall b > 1, \alpha > 0, p \in \mathbb{R}$:

• Caso $p \leq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log_b n)^p}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\log_b n)^{|p|} n^\alpha} = 0$.

• Caso $p > 0$: ← forma indeterminata $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Poniamo $a_n = \log_b n$ ($a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$) e sostituiamo

$\frac{(\log_b n)^p}{n^\alpha} = \frac{(a_n)^p}{b^{\alpha \log_b n}} = \frac{a_n^p}{(b^\alpha)^{a_n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ per la NOTA del punto b).

$\Rightarrow (\log_b n)^p \ll n^\alpha \text{ per } n \rightarrow +\infty \quad \forall b > 1, \alpha > 0, p \in \mathbb{R}$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0$:

• Caso $0 < a < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

• Caso $a = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$.

- Caso $a > 1$: $\leftarrow$ forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Notiamo che $\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdots \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{1}$.

Inoltre sappiamo che $\frac{a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 0 < \frac{a}{n} < \frac{1}{2} \forall n > \bar{n}$.

Quindi, $\forall n > \bar{n}$, $0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{\bar{n}} \cdot \left(\frac{a}{\bar{n}+1} \cdots \frac{a}{n} \right) < \frac{a^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-\bar{n}}$

$\Rightarrow$ per il thm. del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \forall a > 1$.

Alternativamente, si poteva usare il criterio del rapporto per successioni.

$\leftarrow$ Es. paradigma 5.12

$\Rightarrow a^n \ll n!$ per $n \rightarrow +\infty \forall a > 0$.

- e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n}$: $\leftarrow$ forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{<1} \cdots \underbrace{\frac{2}{n}}_{<1} \cdot \frac{1}{n} < 1 \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \text{per il thm. del confronto}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Alternativamente, si poteva usare il criterio del rapporto per successioni.

$\Rightarrow n! \ll n^n$ per $n \rightarrow +\infty$.

GERARCHIA DEGLI INFINITI:

$$\left(\log_b n \right)^b \ll n^a \ll a^n \ll n! \ll n^n \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

$\uparrow$ per c) $\uparrow$ per b) $\uparrow$ per d) $\uparrow$ per e)

Alternativa per punti d) e e):

d) $a_n = \frac{a^n}{n!} > 0$ se $a > 0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

e) $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0 \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

limite notevole: $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$.

Extra:

Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \forall p \in \mathbb{R}$ (generalizzazione di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (*)).

• $p=0$: $\sqrt[n]{n^0} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

• $p=K \in \mathbb{N}_{>0}$: $\sqrt[n]{n^K} = (\sqrt[n]{n})^K \Rightarrow$ prodotto finito di limiti finiti (*), $\sqrt[n]{n^K} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

• $p=-K \in \mathbb{Z}_-$: $\sqrt[n]{n^{-K}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^K} \Rightarrow$ prodotto finito di limiti finiti (*), $\sqrt[n]{n^{-K}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

• $p \in \mathbb{R}$: come in b), $\sqrt[n]{n^{p-1}} \leq \sqrt[n]{n^p} \leq \sqrt[n]{n^{p+1}} \Rightarrow$ thm. del confronto, $\sqrt[n]{n^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \forall p \in \mathbb{R}$.

APPROFONDIMENTO:

Criterio della radice per successioni:

$(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a_n \geq 0 \forall n$. Poniamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

i) se $l < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$,

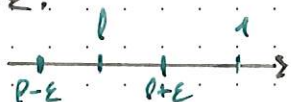
ii) se $l > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

NOTA: se $l = 1$, non si può dedurre nulla da questo criterio (*).

Dimostrazione:

$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n}_\varepsilon, l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$.

i) Siccome $l < 1$, scegliamo ε t.c. $l + \varepsilon < 1$, ovvero



Ad esempio scegliamo $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0 \Rightarrow \forall n > \bar{n}_\varepsilon, l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon = \frac{l+1}{2}$.

Otteniamo $0 \leq a_n < \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) Analogamente, scegliamo $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$, in modo che $l - \varepsilon > 1$, ovvero

$\dots$ $\dots$. Quindi $\forall n > \bar{n}_\varepsilon, \sqrt[n]{a_n} > l - \varepsilon = \frac{l+1}{2}$. Otteniamo

$a_n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \Rightarrow$ per il teorema del confronto $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Esempi:

i) $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+ : a_n = \frac{n^{51}}{8^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^{51}}}{8} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) $(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+ : a_n = \frac{1}{(\log n)^{n/2}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = (\log n)^{-1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

NOTA: Riprendiamo il discorso (*):

$(a_n)_n \subset \mathbb{R}_+ : a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

$(b_n)_n \subset \mathbb{R}_+ : b_n = \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{b_n} = 1 + \frac{4}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^n = 1$.

MEMO:

Criterio del rapporto per successioni:

$(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $a_n > 0 \forall n$. Poniamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

i) se $l < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

ii) se $l > 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

NOTA: se $l = 1$, non si può dedurre nulla da questo criterio.

Dimostrazione: Per esercizio per casa!

Esercizio 2:

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dimostrare che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ e calcolarlo.

Svolgimento:

IDEA: applicare il teorema del limite di successioni monotone (*).

(1) Dimostriamo che $(a_n)_n$ è limitata:

• per costruzione, $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

• per induzione, $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

- **passo base**: $a_0 = 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

- **passo induttivo**: supponiamo $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e dimostriamolo

per a_{n+1} . Ovvero,

$$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

hp. induttivo $\uparrow$ *hp. induttivo*

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}} = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

quindi $(a_n)_n$ è limitata.

(2) Dimostriamo che $(a_n)_n$ è monotona crescente:

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt{1+a_n} \geq a_n \Leftrightarrow 1+a_n - a_n^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Δ a_n è positiva per definizione $\Rightarrow$ posso elevare al quadrato.
ma abbiamo dimostrato prima che $1 \leq a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

quindi $(a_n)_n$ è monotona crescente. *positivo dato che $a_n > 0 \quad \forall n$.*

Ora possiamo applicare (*) e dire che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_n a_n = l < +\infty$.

Calcoliamo l:

Δ algebra dei limiti finiti: $(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty) +$ continuità di $\sqrt{\cdot}$.

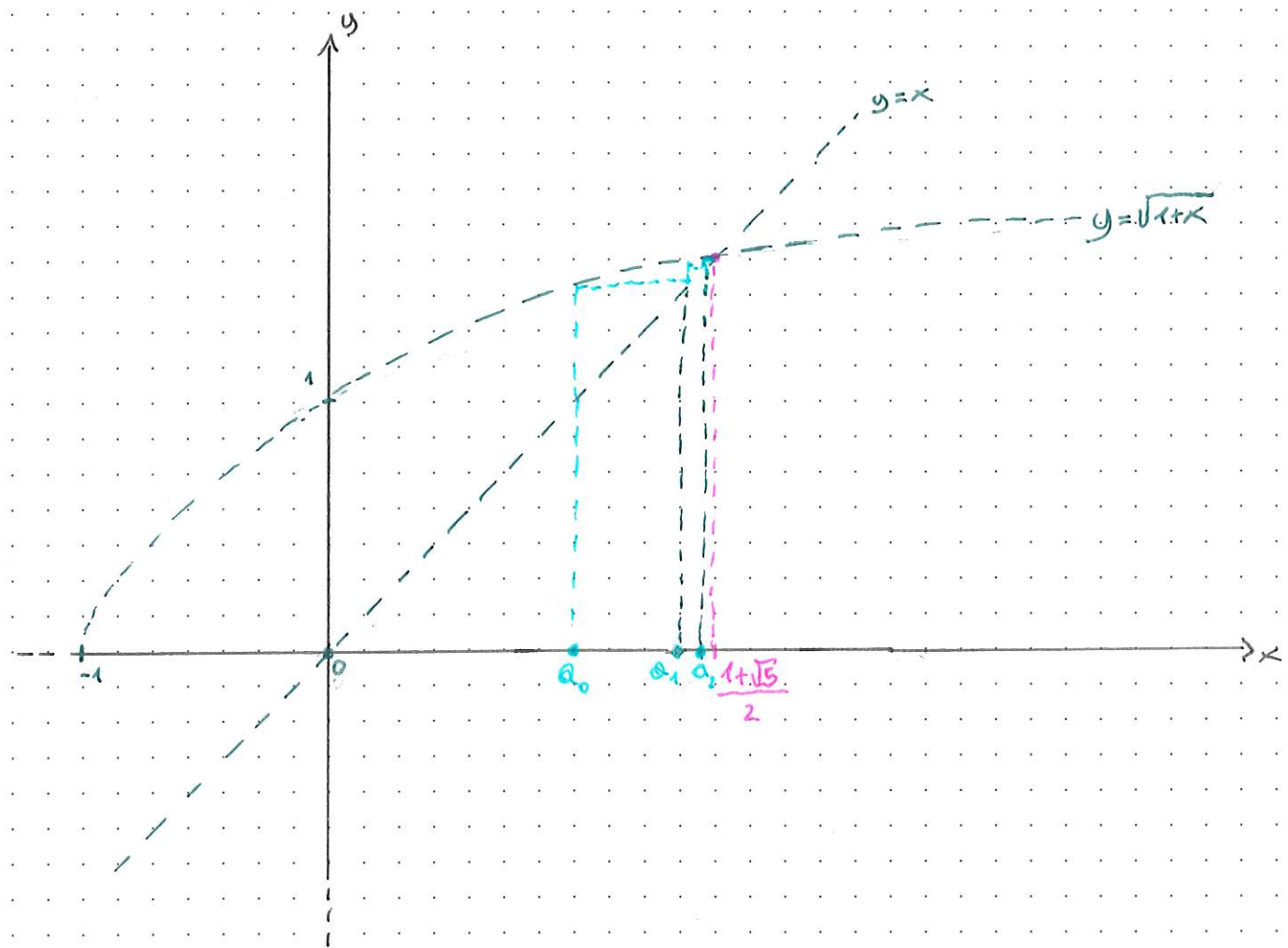
$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = \sqrt{1+l}$$

quindi Δ l positivo $\Rightarrow$ posso elevare al quadrato.

$$l = \sqrt{1+l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\uparrow$ NON ACCETTABILE, $l > 0$!

Mediano graficamente:



Esercizio 3:

Stabilire se

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x(\sqrt{x+1}-1)} & x > 0, \\ ke^x - 2 & x \leq 0. \end{cases}$$

è continua $\forall k \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

Sia $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x(\sqrt{x+1}-1)}$ e $h(x) = ke^x - 2$.

Osserviamo che f è continua su $(-\infty, 0)$ e h è continua su $(0, +\infty)$.

Rimane quindi da controllare la continuità in 0:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \\ &\stackrel{\text{razionalizzo}}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x(\sqrt{x+1}+x)}{x} \right) = 2, \end{aligned}$$

$\downarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ limite notevole.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = h(0) = k - 2.$$

Quindi g è continua in 0 (e di conseguenza su tutto $\mathbb{R}$)

se $k - 2 = 2 \iff k = 4$.

Esercizio 4:

sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, limitata e tale che $g(x) = x^3$ su $[-1, 1]$ e $g(x) \leq -1$ se $|x| \geq 2$. g ha necessariamente massimo e minimo su $\mathbb{R}$?

Svolgimento:

g continua su $\mathbb{R} \Rightarrow g$ continua su $[-2, 2]$.

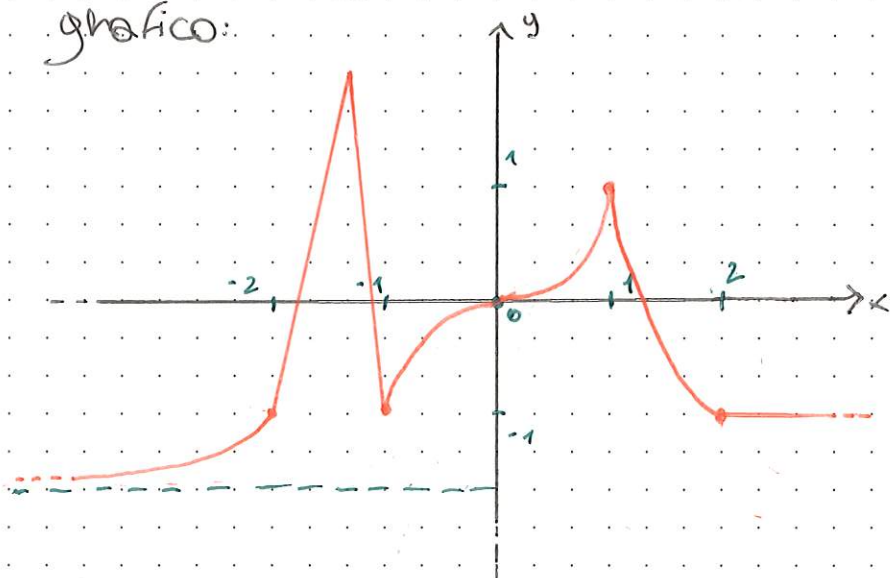
Per il Teorema di Weierstrass

$$\exists \min_{[-2, 2]} g \text{ e } \exists \max_{[-2, 2]} g.$$

In particolare, $\max_{x \in [-2, 2]} g(x) \geq g(1) = 1$.

Inoltre, $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $|x| \geq 2$, $g(x) \leq -1 < 1$. Quindi g ammette massimo su $\mathbb{R}$ con $\max_{\mathbb{R}} g = \max_{[-2, 2]} g$.

Per quanto riguarda il minimo troviamo un controesempio grafico:



In questo caso g è continua e limitata su $\mathbb{R}$ ed è tale che $g(x) = x^3$ su $[-1, 1]$ e $g(x) \leq -1$ se $|x| \geq 2$, ma non ha minimo su $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO: trovare un'espressione esplicita per g .

Esercizio 5:

Dimostrare che $f(x) = x^2 + x \cos x + \sin x$ ha minimo su $\mathbb{R}$.

Svolgimento:

f è continua su $\mathbb{R}$.

$$\text{Inoltre, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} \right) = +\infty.$$

Quindi f ha un minimo su $\mathbb{R}$ per il teorema di Weierstrass generalizzato.

Esercizio 6:

Dimostrare che $f(x) = x^3 + x + 1$ è biettiva su $\mathbb{R}$.

Calcolare $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right)$.

Svolgimento:

f è continua su $\mathbb{R}$. Inoltre f è strettamente crescente (poiché somma di funzioni strettamente crescenti) $\Rightarrow f$ è iniettiva.

f suriettiva: $\forall k \in \mathbb{R} \exists x_k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x_k) = k$.

Sia k fissato, definiamo $g(x) = f(x) - k$ (continua su $\mathbb{R}$).

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$. Per il teorema degli zeri $\exists g(x_k) = 0$,
ossia $f(x_k) = k \Rightarrow f$ è suriettiva.

Quindi f è biettiva.

Per il teorema di continuità della funzione inversa, f^{-1} è continua su $\mathbb{R}$.

Di conseguenza:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(\frac{3y}{y+4}\right) = \lim_{z \rightarrow 3} f^{-1}(z) = f^{-1}(3) = 1.$$

continuità di f^{-1}

limite di funzione composta
 $\left(z = \frac{3y}{y+4} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 3\right)$