

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: 1)  $f(x) = \tan(\tan(x))$

2)  $f(x) = \log(x) (\log \log(x) - 1)$

3)  $f(x) = \sinh(x)^{\cosh(x)}$

1) •  $g'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow f'(x) = (g \circ g)'(x) = g'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\cos^2(\tan(x))} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$

2) •  $f'(x) = \frac{1}{x} (\log \log x - 1) + \log x (\log \log x - 1)'$   
 $= \frac{1}{x} (\log \log x - 1) + \log x \left( \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{\log \log x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$

3) • MEMO:  $\begin{cases} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sinh(x))' = \cosh(x) \\ (\cosh(x))' = \sinh(x) \end{cases}$

•  $f(x) = \sinh(x)^{\cosh(x)} = e^{\ln(\sinh(x)^{\cosh(x)})} = e^{\cosh(x) \cdot \ln(\sinh(x))}$

• se  $g(x) = \cosh(x) \cdot \ln(\sinh(x))$ , allora  $f(x) = e^{g(x)}$  e  $f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$

•  $\Rightarrow g'(x) = \sinh(x) \cdot \ln(\sinh(x)) + \cosh(x) \cdot \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \sinh(x) [\ln(\sinh(x)) + \coth^2(x)]$

•  $\Rightarrow f'(x) = \sinh(x) [\ln(\sinh(x)) + \coth^2(x)] \underbrace{\sinh(x)^{\cosh(x)}}_{e^{g(x)}} = \sinh(x)^{\cosh(x)+1} [\ln(\sinh(x)) + \coth^2(x)]$

Studiare la derivabilità di  $f(x) = |x|^m \quad \forall m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} x^m & x \geq 0 \\ (-1)^m x^m & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ è derivabile in } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\bullet \quad f \text{ è derivabile anche in } x_0 = 0 \Leftrightarrow \exists \text{ finito } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ finiti } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\bullet \quad \text{se } m \text{ pari, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^m}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^m}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^{m-1} = 0 \end{cases}$$

N.B.  $|x|^{2k} = x^{2k} \Rightarrow$  derivabile  $\infty$  volte

$$\bullet \quad \text{se } m \text{ dispari, } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^m}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-1} = 0 \quad \Leftrightarrow m > 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-1)^m x^m}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1)^m x^{m-1} = 0 \quad \Leftrightarrow m > 1 \end{cases}$$

• infatti per  $m=1$  abbiamo  $f(x) = |x|$  NON derivabile in  $x_0 = 0$

N.B. in generale,  $f(x) = |x|^m$  è derivabile  $(m-1)$  volte per  $m$  dispari: per  $1 \leq k \leq m-1$

$$\exists f^{(k)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} \operatorname{sign}(x) x^{m-k} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ma } \left( \begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = m! \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = -m! \end{aligned} \right) \Rightarrow f^{(k)} \text{ NON è derivabile in } 0$$

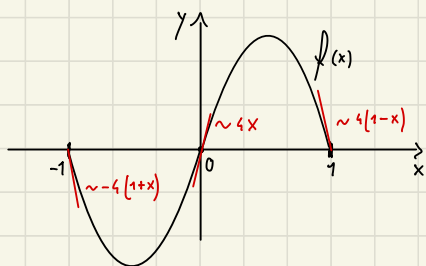
Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e di periodo 2 definita in  $[-1, 1]$  come  $f(x) = 4x(1-x)$

Provare che  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.c. } g \text{ derivabile e } g' \text{ continua}\}$

- $f$  continua in  $]-1, 1[$  e derivabile in  $]-1, 1[ \setminus \{0\} \Rightarrow$  se  $f$  è derivabile in  $x_0=0$ ,  $x_1=1$  e  $x_2=-1$ , per periodicità, è derivabile in  $\mathbb{R}$  (e continua)

- osserviamo  $\begin{cases} f(x) \sim 4x & \text{per } x \rightarrow 0 \\ f(x) \sim 4(1-x) & \text{per } x \rightarrow 1^- \\ f(x) \sim -4(1+x) & \text{per } x \rightarrow -1^+ \end{cases}$

potevamo anche  
notare che  $f$   
è dispari



$\Rightarrow$  in  $x_0, x_1, x_2$   $f$  è derivabile (e continua)

Alternativamente, facciamo i limiti dei rapporti incrementali:

$$* \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(1-x) - 0}{x - 0} = 4 \Rightarrow f \text{ derivabile in } x_0 = 0$$

$$* \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x(1-x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x(1-x)}{x-1} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x(1+x)}{x+1} = -4 \end{cases} \Rightarrow f \text{ " in } x_1 = 1$$

per periodicità

$$* \text{ il caso } x_2 = -1 \text{ è analogo al caso } x_1 = 1 \Rightarrow f \text{ " in } x_2 = -1$$

- $\Rightarrow f$  è derivabile in  $[-1, 1]$  e, per periodicità, su  $\mathbb{R}$

$$* f'(x) = \begin{cases} 4 - 8x & x \in ]0, 1[ \\ 4 + 8x & x \in ]-1, 0[ \end{cases}$$

$\Rightarrow$  come prima, basta controllare la continuità in  $x_0, x_1, x_2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - 8x = 4 = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 + 8x \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 + 8(x-2) = -4 = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 - 8x \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} 4 + 8x = -4 = \lim_{x \rightarrow -1^-} 4 - 8(x+2) \end{array} \right. \Rightarrow f' \text{ continua su } \mathbb{R}$$

*periodicità*      *periodicità*

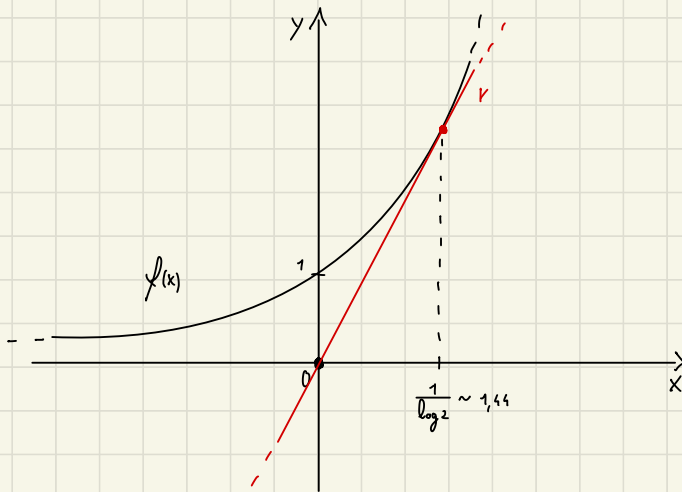
Trovare l'equazione della retta passante per  $(0,0)$  e Tangente al grafico di  $f(x)=2^x$

- eq. della retta tangente al grafico di  $f$  in  $x_0$  è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 2^{x_0} + \log 2 \cdot 2^{x_0}(x - x_0) = 2^{x_0} \left( 1 + \log 2 (x - x_0) \right) \quad \left( \leadsto f'(x) = \log 2 \cdot 2^x \right)$$

- imponiamo il passaggio per l'origine:  $0 = 2^{x_0} \left( 1 - \log 2 \cdot x_0 \right) \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\log 2}$

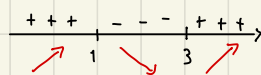
- $\Rightarrow$  retta  $r$ :  $y = 2^{\frac{1}{\log 2}} \left[ 1 + \log 2 \left( x - \frac{1}{\log 2} \right) \right] = 2^{\frac{1}{\log 2}} (\log 2) x$



Determinare per quali  $K \in \mathbb{R}$   $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + K$  ha 1 sola radice reale

- $f(x) = x(x-3)^2 + K$  continua e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{Thm } \exists$  degli zeri,  
 $f$  ha almeno uno zero (in  $[a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $f(a)f(b) < 0$ )
- $f$  è derivabile in  $\mathbb{R}$  e  $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3) \Rightarrow$  possiamo dedurre che

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ è crescente in } ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[ \\ f \text{ è decrescente in } ]1, 3[ \end{array} \right.$



- $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 3$  sono punti critici di  $f \Rightarrow$  dal Thm di Fermat e dallo studio de segno di  $f'$  deduciamo che  $x_0 = 1$  è max. locale e  $x_1 = 3$  è min. locale
- notiamo che  $f$  ammette un solo zero  $\Leftrightarrow (f(3) > 0 \vee f(1) < 0) \Leftrightarrow K > 0 \vee K < -4$   
 (alternativamente, potevamo chiedere che min e max locali avessero lo stesso segno:  $f(1) \cdot f(3) > 0 \Leftrightarrow K > 0 \vee K < -4$ )

N.B. è sbagliato dire che  $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$  crescente (o  $f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$  decrescente) perché da

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{si può solo dire che } \exists \begin{cases} I_1 = (x_0, x_0 + \delta_1) : f(x) \stackrel{(<)}{>} f(x_0) \quad \forall x \in I_1, \\ I_2 = (x_0 - \delta_2, x_0) : f(x) \stackrel{(>)}{<} f(x_0) \quad \forall x \in I_2 \end{cases}$$

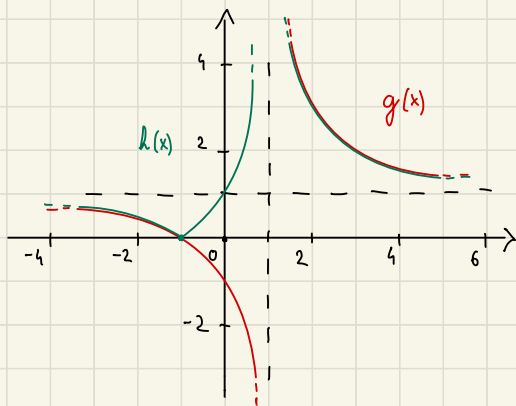
Ad esempio,  $g(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  ha  $g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = 1$ , ma  $g$  NON è monotona

in nessun intorno di 0

Studiare la funzione  $f(x) = e^{\left| \frac{x+1}{x-1} \right|}$  qualitativamente

$$\begin{aligned} \bullet \quad g(x) &= \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \\ h(x) &= |g(x)| \end{aligned}$$

$$\bullet \quad f(x) = e^{h(x)} \quad \begin{cases} < 1 & \text{se } h(x) < 0 \\ = 1 & \text{se } h(x) = 0 \\ > 1 & \text{se } h(x) > 0 \end{cases}$$

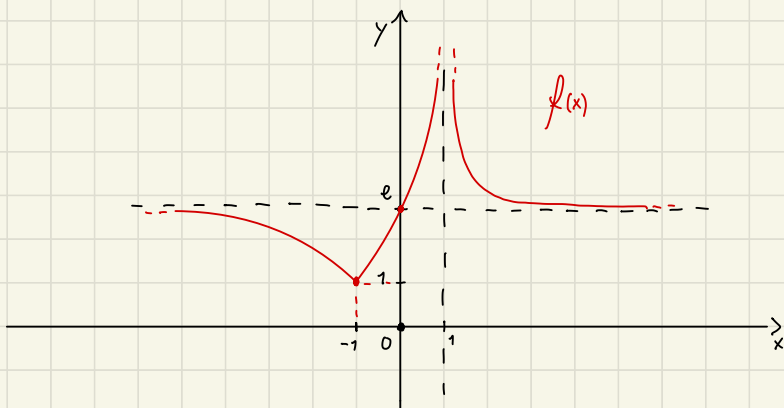


• studiando il comportamento di  $h$  possiamo ricavare informazioni per disegnare  $f$ :

$$\left. \begin{aligned} h(x) &> 0 \quad \forall x \neq -1 \\ h(x) &= 0 \quad \text{in } x = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{e} \quad f(x) = 1 \quad \text{iff } x = -1$$

$$h(x) \rightarrow 1 \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow e \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty$$

$$h(x) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow 1$$



La prossima volta (15/11/24) faremo uno studio anche quantitativo di  $f$

## Extra

Trova  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \sim g$  per  $x \rightarrow +\infty$  e tali che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$

sia: 1)  $l \in \mathbb{R}$  2)  $\pm \infty$  3)  $\nexists$

1) •  $f(x) = x+1$ ,  $g(x) = x$

2) •  $f(x) = x^2 + x$ ,  $g(x) = x^2$

3) •  $f(x) = x + \sin(x)$ ,  $g(x) = x$

E' vero, in generale, che se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$  allora  $f \sim g$  per  $x \rightarrow +\infty$ ?

• NO, controesempio:  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $g(x) = \frac{1}{x^2}$

E se  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ?

$$\cdot \left( \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \end{array} \right) \Rightarrow 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = l - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\cdot \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{l}{l} = 1$$