

Esercitazione Fisica e Matematica 15/11/2024:

Esercizio 1:

Studiare la funzione $g(x) = e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}$ e disegnare un grafico qualitativo.

Svolgimento:

i) Dominio naturale: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

ii) Simmetrie: il dominio è asimmetrico rispetto a 0 $\Rightarrow$ non ci possono essere simmetrie ($g(-x) = e^{\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|} \neq \pm g(x)$).

iii) Segno di $g(x)$: $g(x) > 0 \quad \leftarrow g \text{ è un'esponenziale!}$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} (= \text{dom}(g))$. Inoltre $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 1$, $g(x) = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 0$, ovvero $x = -1$ (minimo globale).

iv) Limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} &= e^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} &= e^- \quad \Rightarrow e \text{ è un asintoto orizzontale!} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} &= +\infty \quad \Rightarrow 1 \text{ è un asintoto verticale!} \end{aligned}$$

v) Continuità: g è continua sul dominio.

vi) Derivabilità: Definiamo $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$, e otteniamo

$$g(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & \text{se } |x| > 1 \text{ e } x \neq -1, \\ e^{-f(x)} & \text{se } |x| < 1. \end{cases} \quad \leftarrow \text{Osserviamo che } g \text{ è sicuramente derivabile su } \text{dom}(g) \setminus \{-1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

ora chiamiamo $A = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e $B = (-1, 1)$.

Su A abbiamo $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) = -\frac{2e^{f(x)}}{(x-1)^2}$.

Su B abbiamo $g'(x) = -e^{-f(x)} \cdot f'(x) = \frac{2e^{-f(x)}}{(x-1)^2}$.

Ma in $x = -1$ cosa succede a $g'(x)$?

Per il calcolo del teorema di L'Hôpital

$$g'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} g'(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g'(x) = \frac{1}{2},$$

quindi $g(x)$ ha un punto angoloso in $x = -1$ ed in esso non è derivabile!

vii) Punti critici e segno di $g'(x)$:

$g'(x) < 0 \forall x \in A$ e $g'(x) > 0 \forall x \in B$, quindi g è strettamente decrescente in A e strettamente crescente in B .

Inoltre $g'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow \nexists$ punti critici. ← non vuol dire $\exists$ max/min!

viii) Convessità e derivata seconda: $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$.

Su A : $g''(x) = (e^{f(x)})' \cdot f'(x) + e^{f(x)} \cdot f''(x) = e^{f(x)} ((f'(x))^2 + f''(x)) = \frac{4x}{(x-1)^4} e^{f(x)}$.

Su B : $g''(x) = (-e^{-f(x)})' \cdot f'(x) - e^{-f(x)} \cdot f''(x) = e^{-f(x)} ((f'(x))^2 - f''(x)) = \frac{4(2-x)}{(x-1)^4} e^{-f(x)}$.

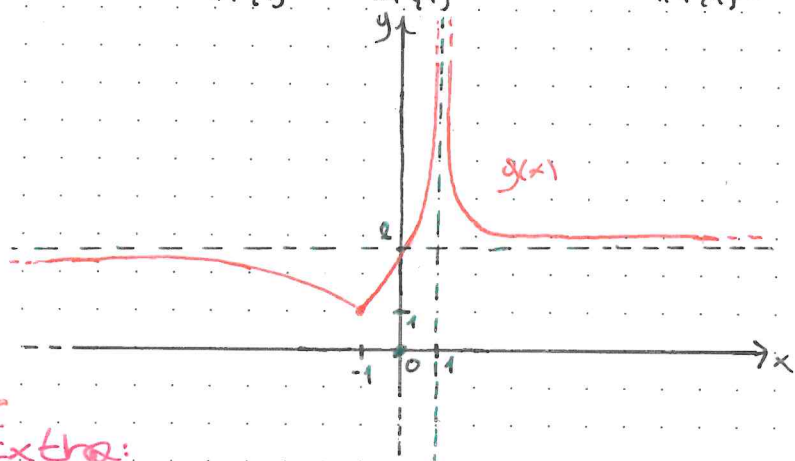
Otteniamo che $g''(x) < 0 \forall x < -1$ e $g''(x) > 0 \forall x \in B \cup (1, +\infty)$.

Quindi $g(x)$ è concava per $x < -1$ e convessa per $x \in B \cup (1, +\infty)$.

ix) $\exists$ max e min globali:

Dal punto (ii) abbiamo un minimo globale per $x = -1$, mentre non abbiamo massimi globali. Quindi

$$\inf_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = \min_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = 1 \quad \text{e} \quad \sup_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g = +\infty \quad (\Rightarrow \nexists \max_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} g).$$



Nota: questo studio di funzione è stato svolto in maniera scolastica, ma bisogna saper essere flessibili dato che non sempre i passaggi possono essere eseguiti in questo ordine. Ad esempio puoi capire che per studiare il segno di $f(x)$ vedono svolti prima altri step!!

Extra:

Consideriamo $g|_{(1, +\infty)} : (1, +\infty) \rightarrow (e, +\infty)$. Su di essa possiamo dire che è strettamente decrescente (vedi vii) e continua (vedi vi) $\Rightarrow$ è iniettiva.

Inoltre è suriettiva poiché $\text{codom}(g|_{(1, +\infty)}) = \text{imm}(g|_{(1, +\infty)})$. Di conseguenza $\exists g^{-1} : (e, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$. Calcoliamo ora $(g^{-1})'(e^3)$.

Applichiamo il teorema della derivata della funzione inversa, per cui si ha (siccome $g^{-1}(e^3) = 2$):

$$(g^{-1})'(e^3) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2e^3} = -\frac{e^{-3}}{2}.$$

Esercizio 2:

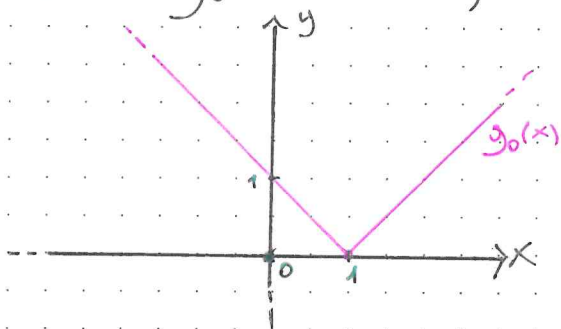
Sia $g_\alpha(x) = |x-1|e^{-\alpha x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Tracciare un grafico qualitativo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui $x_0 = 0$ è un punto di massimo globale in $[0, +\infty)$.

Svolgimento:

- $\text{Dom}(g_\alpha) = \mathbb{R}$, g_α è continua su tutto $\mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $g_\alpha(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

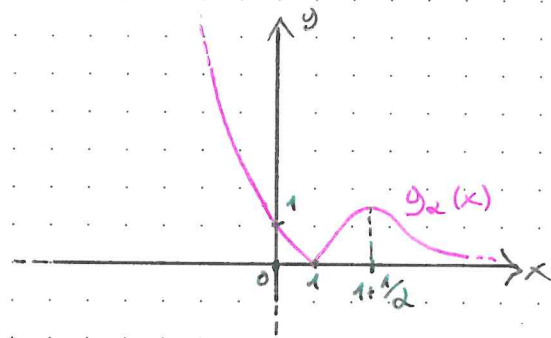
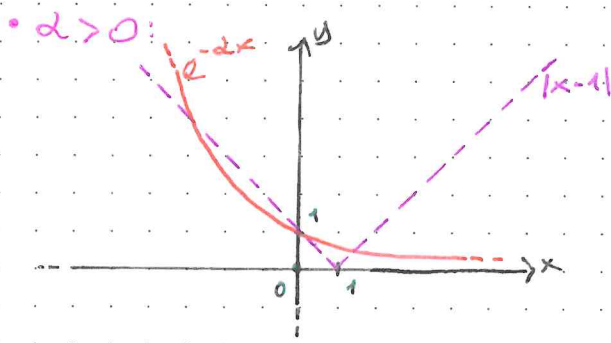
- $\alpha = 0$: $g_0(x) = |x-1|$, è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, non lo è in $x=1$.



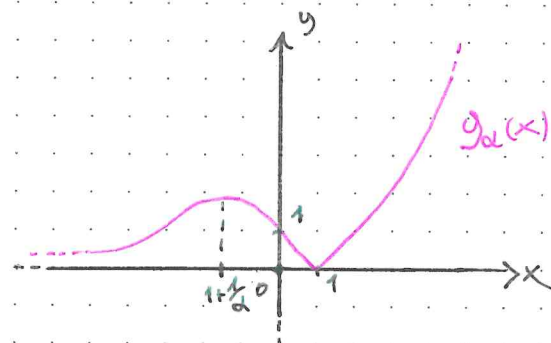
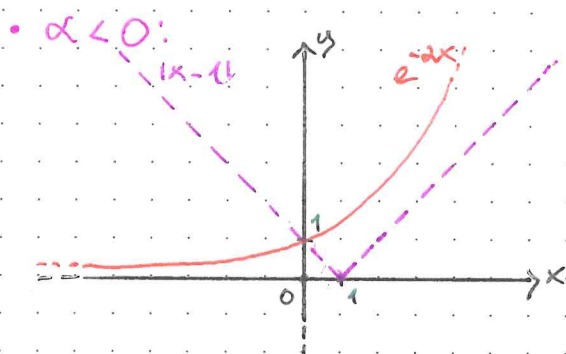
$$\sup_{\mathbb{R}} g_0 = +\infty,$$

$$\inf_{\mathbb{R}} g_0 = \min_{\mathbb{R}} g_0 = 0$$

$\Rightarrow x=1$ è un punto di minimo assoluto.



Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|}{e^{\alpha x}} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = +\infty$.



Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1|e^{-\alpha x} = 0$.

i.) Affinché $x_0 = 0$ sia punto di massimo globale in $[0, +\infty)$, dobbiamo considerare solo il caso $\alpha > 0$ (se $\alpha \leq 0$, $\sup_{(0, +\infty)} g_\alpha = +\infty \Rightarrow \nexists \max_{(0, +\infty)} g_\alpha$).

Inoltre possiamo dedurre un'ulteriore condizione dal grafico di g_α per $\alpha > 0$: $g_\alpha(0) = 1 \geq g_\alpha(1 + \frac{1}{\alpha})$. Quindi

$$\begin{cases} \alpha > 0, \\ g_\alpha(0) \geq g_\alpha(1 + \frac{1}{\alpha}), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha > 0, \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1} \leq 1. \end{cases}$$

Studiamo la seconda disuguaglianza:

$$\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha-1} \leq 1 \Rightarrow \alpha e^{\alpha+1} \geq 1.$$

Questa equazione non può essere risolta analiticamente, si può però usare un metodo numerico (e.g., il metodo di bisezione).

Definiamo come $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ la soluzione di $\alpha e^{\alpha+1} = 1$. ← $\alpha > 0$: I condizione.

Notiamo che la funzione $\alpha e^{\alpha+1}$ $\nearrow$ per $\alpha > 0$.

Quindi possiamo dire che $x_0 = 0$ è un punto di massimo globale in $[0, +\infty)$ per $g_\alpha(x) \forall \alpha \geq \bar{\alpha} > 0$. da crescita di $\alpha e^{\alpha+1}$.

NOTA: Il fatto che $g_\alpha(x)$ abbia un massimo locale per $x = 1 + \frac{1}{\alpha}$ si ottiene dallo studio della derivata prima. L'io' è vero sia per $\alpha > 0$ che per $\alpha < 0$, ma non per $\alpha = 0$.

Invece $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha che $x = 1$ corrisponde ad un minimo globale, anche se $x = 1$ non è un punto critico di $g'_\alpha(x)$.

Infatti $g_\alpha(x)$ non è derivabile in $x = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Per casa: Calcolare e studiare $g'_\alpha(x)$ e $g''_\alpha(x)$. Inoltre dimostrare che $g_\alpha(x)$ non è derivabile in $x = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3:

Sia $f(x) = \sqrt{|x^3| + 3x + 2}$.

i) Studiare la derivabilità di f .

ii) Tracciare il grafico qualitativo di f .

Svolgimento:

i) $f(x) = h \circ g(x)$ con $h(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = |x^3| + 3x + 2$.

a) Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ $g(x) \geq 0$? (Dominio naturale di f)

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, può essere rischita come

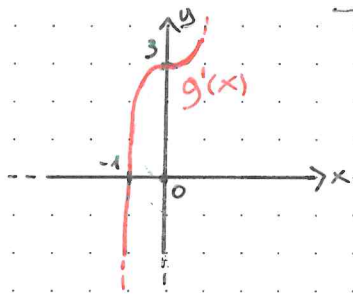
$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x + 2 & x \geq 0, \\ -x^3 + 3x + 2 & x < 0. \end{cases}$$

g è derivabile in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma in $x=0$?

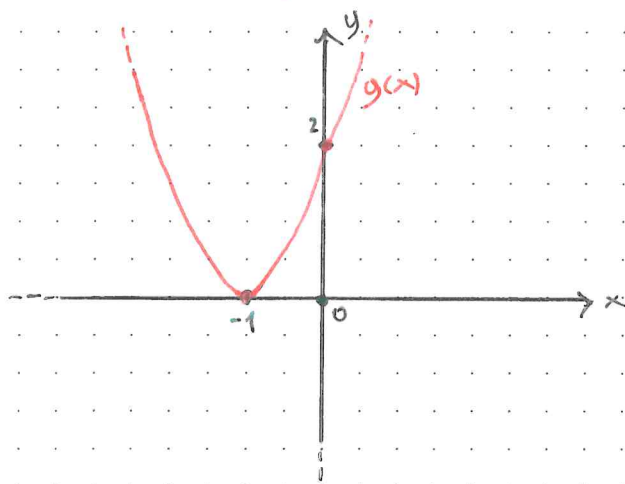
$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & x > 0, \\ -3x^2 + 3 & x < 0. \end{cases}$$

Per il corollario del teorema di Lagrange $g'_+(0) = 3 = g'_-(0)$

$\Rightarrow \exists g'(0) = 3$ (ovvero g è derivabile su tutto $\mathbb{R}$).



$g'(x) > 0$ per $x > -1 \Rightarrow g$ crescente,
 $g'(x) < 0$ per $x < -1 \Rightarrow g$ decrescente:
 $x = -1$ minimo locale!



$$g(x) = |x^3| + 3x + 2;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty,$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

$x = -1$ è quindi minimo globale.

Dato che $g(-1) = 0$, $g(x) \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Derivabilità di $f(x) = \sqrt{g(x)}$:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ da a), f è continua e derivabile in tutto

$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, ma in $x = -1$? ← problema radice nel suo o!

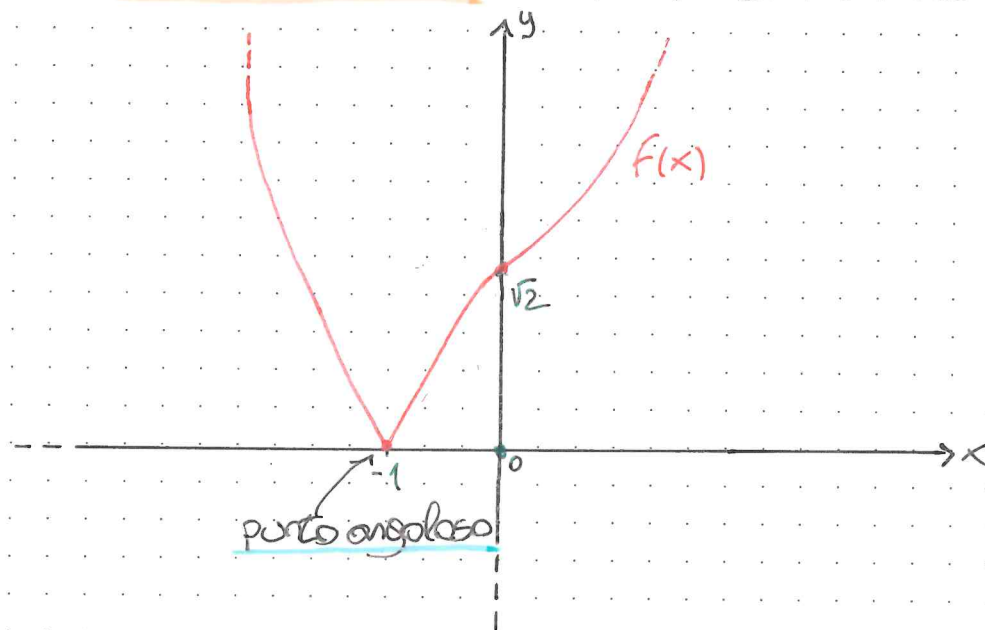
$$g(x) = -x^3 + 3x + 2 = (x+1)^2(2-x) \text{ per } x < 0.$$

Quindi in un intorno di $x = -1$ (< 0):

$$f(x) = \sqrt{-x^3 + 3x + 2} = \sqrt{(x+1)^2(2-x)} = |x+1|\sqrt{2-x} \sim \sqrt{3}|x+1|.$$

$\sqrt{3}|x+1|$ non è derivabile in $x = -1 \Rightarrow$ neanche f lo è.

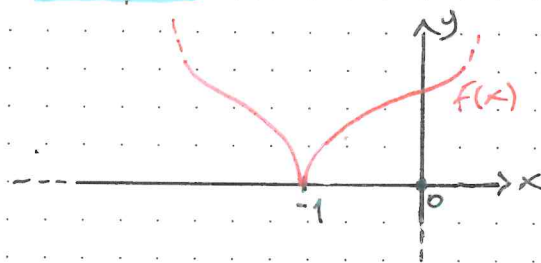
ii)



OSSERVAZIONE:

i) Se $g(x) \sim x+1$ per $x < 0$, $f(x) \sim \sqrt{|x+1|} = |x+1|^{\frac{1}{2}}$ per $x < 0$.

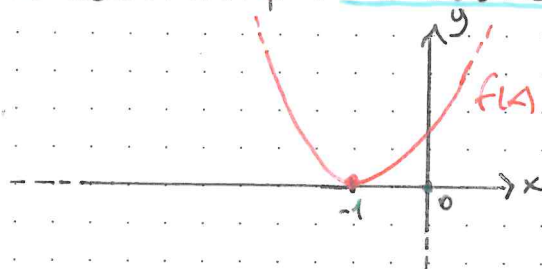
Quindi in un intorno di $x = -1$, $f(x)$ sarebbe non derivabile con la stessa problematica della radice, ovvero una cuspide in $x = -1$.



ii) Se $g(x) \sim (x+1)^3$ per $x < 0$, $f(x) \sim \sqrt{|x+1|^3} = |x+1|^{\frac{3}{2}}$ per $x < 0$.

In tal caso sarebbe sempre derivabile su $\mathbb{R}$ (vale in generale

per $g(x) \sim x^a$, $a \geq 3$).



Per caso: cosa succederebbe ad $f(x)$ se $h(x) = \log(x)$, ovvero $f(x) = \log(|x^3 + 3x + 2|)$?

Teorema di de L'Hôpital:

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili su (a, b) . Inoltre sia $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $x_0 \in [a, b]$. Se

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (o $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$),

ii) $g'(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$,

iii) $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ ($g(x) \neq 0$ per $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$).

Esercizio 4:

Calcolare i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^3 x - 1}{\log(1+2x) \cosh(x^3)} \left[\frac{0}{0} \right]$,

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\log(x+1))}{\log(x)} \left[\frac{-\infty}{-\infty} \right]$.

Svolgimento:

a) $f(x) = \cos^3 x - 1 \Rightarrow f'(x) = -3 \cos^2(x) \sin(x)$,

$g(x) = \log(1+2x) \cosh(x^3) \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{1+2x} \cosh(x^3) + 3 \log(1+2x) \sinh(x^3) x^2$.

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ ($x_0 = 0^+$).

ii) $g'(0) = 2 > 0$ e g' è continua in un intorno di 0 $\Rightarrow$ per il thm. di permanenza del segno $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c. $g'(x) > 0 \forall x \in (0, \alpha)$.

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

b) $f(x) = \log(\log(x+1)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\log(x+1)(x+1)}$, $g(x) = \log(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$.

f e g verificano i) e ii), vediamo iii):

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{(x+1) \log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\log(x+1)} \left[\frac{0}{0} \right]^x$

Proviamo ad applicare nuovamente de L'Hôpital:

$h(x) = x \Rightarrow h'(x) = 1$ e $l(x) = \log(x+1) \Rightarrow l'(x) = \frac{1}{x+1}$, $l'(0) = 1$.

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} l(x) = 0$.

ii) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ t.c. $l'(x) > 0 \forall x \in (0, \alpha)$, oppure $\frac{1}{x+1} \neq 0 \forall x \in (0, \alpha)$.

iii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h'(x)}{l'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Verifico le ipotesi di de L'Hôpital (x)