

MEMO

Polinomi di Taylor in $x_0=0$ $\left(P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \right)$

• $e^x \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$

• $\log(1+x) \Rightarrow \quad = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

• $\cos(x) \Rightarrow P_{2n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$

• $\sin(x) \Rightarrow P_{2n+1,0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

• $\tan(x) \Rightarrow P_{7,0}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$

• $(1+x)^\alpha \Rightarrow P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

* Formula di Taylor con resto di Peano

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, der. $(n-1)$ volte in (a,b) e n volte in $x_0 \in (a,b)$. Allora $\forall x \in (a,b)$

si ha, per $x \rightarrow x_0$, $f(x) = P_{n,x_0}(x) + o(|x-x_0|^n)$

* Formula di Taylor con resto di Lagrange

$f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, der. $(n+1)$ volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora $\forall x \in (a,b)$

$\exists c_x$ tra x e x_0 t.c. $f(x) = P_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ "ERRORE DI INTERPOLAZIONE"

Scrivere il polinomio di Taylor (con resto di Peano) di ordine 3 centrato in $x_0=0$ di

$$f(x) = \log(1 + \arctan(x)) - \sin(\tan x)$$

Discutere poi il valore di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos(x) + 1}{x^2}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

1° step: polinomio di Taylor

$$\bullet \int \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \end{array} \right. \quad \text{"}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log(1 + \arctan(x)) &= \arctan(x) - \frac{\arctan^2(x)}{2} + \frac{\arctan^3(x)}{3} + o(\arctan^3(x)) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{3} \left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\bullet \int \tan(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \end{array} \right. \quad \text{"}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(\tan x) &= \tan x - \frac{\tan^3 x}{6} + o(\tan^3 x) \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{6} \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\ &= x + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\bullet \Rightarrow f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

MEMO: $\begin{cases} * \text{ l'ordine di infinitesimo (rispetto all'infinitesimo } x, \text{ per } x \rightarrow 0) \text{ è } 2 \\ * \text{ la parte principale dell'infinitesimo è } -\frac{x^2}{2} \end{cases}$

2° step: discussione del limite

$$\bullet \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

perché i termini successivi dello sviluppo di $\cos(t)$ sono di grado 4 e quindi $o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$

$$\bullet \Rightarrow f(x) - \cos(x) + 1 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{x^2}{2} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos(x) + 1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ 1/6 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 3 + 2K \text{ con } K \in \mathbb{N}_{>0} \\ \nexists & \text{se } \alpha > 3 \text{ e } \alpha \neq 2K+1 \text{ } K \in \mathbb{N} \end{cases}$$

il $\lim_{x \rightarrow 0}$ NON esiste, ma esistono
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \dots = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \dots = -\infty$

EXTRA (PER CASA): calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan^2 x - \log(1+x^4)}{x^\beta}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

$$\bullet \begin{cases} \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \text{ per } x \rightarrow 0 \Rightarrow \arctan^2 x = x^2 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \\ \log(1+x^4) = x^4 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) \end{cases} //$$

$$\bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan^2 x - \log(1+x^4)}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \frac{2}{3}x^4 - x^4 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^\beta} = \begin{cases} 0 & \beta < 4 \\ -1/6 & \beta = 4 \\ -\infty & \beta > 4 \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\bullet \begin{cases} \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6) & \text{per } x \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (e^x - 1)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} \bullet \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right] - \left[x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)\right] + x^\alpha}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 - \frac{13}{12}x^4 + x^\alpha + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ -\frac{13}{12} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Scrivete il polinomio di Taylor (con resto di Peano) di ordine 3 centrato in $x_0=2$ di $\log(x)$

• $f(x) = \log(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \quad , \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$\bullet \quad P_{3, x_0}(x) = \log x_0 + \frac{1}{x_0}(x-x_0) - \frac{1}{2x_0^2}(x-x_0)^2 + \frac{2}{6x_0^3}(x-x_0)^3 \Rightarrow \text{calcolo in } x_0=2$$

$$\begin{aligned} \bullet f(x) &= \log 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{8} (x-2)^2 + \frac{1}{24} (x-2)^3 + o(|x-2|^3) \\ &= \left(\log 2 - \frac{11}{6} \right) + \frac{3}{2} x - \frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{24} x^3 + o(|x-2|^3) \end{aligned}$$

- **ALTERNATIVAMENTE**, siccome abbiamo un log, possiamo provare a ricondurci a

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 1^\circ \text{ НОБО } (b_A (1+t) \text{ A } x): \quad t \rightarrow 0 \Rightarrow t+1 \rightarrow 1 \Rightarrow 2(t+1) \rightarrow 2 \\ 2^\circ \text{ НОБО } (b_A \times A (1+t)): \quad x \rightarrow 2 \Rightarrow \frac{x}{2} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 \rightarrow 0 \end{array} \right) \Rightarrow t = \left(\frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} \log(1+t) = \log\left(1+\left(\frac{x}{2}-1\right)\right) = \log\left(\frac{x}{2}\right) = \log(x) - \log(2) \\ \quad " \quad = \quad " \quad = \left(\frac{x}{2}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-1\right)^3 + o\left(\left|\frac{x}{2}-1\right|^3\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log(x) = \left(\log(2) - \frac{11}{6}\right) + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + O(|x-2|^3)$$

Provare che $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

- per Thm. di Taylor con resto di Lagrange, $\sin(x) = P_{3,0}(x) + \frac{\sin(\xi) x^4}{4!}$ $\xi \in (0, x)$

$$\Rightarrow \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\xi) x^4}{24}$$

- $\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\sin(\xi)}{24 n^4}$ > 0 perché $\sin(x) > 0$ in $(0, \frac{1}{n})$
con $\xi \in (0, \frac{1}{n})$

$$> \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}$$

- $\Rightarrow$ idea: provare che $\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} \geq \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\frac{6n^2 - 1}{6n^3} \geq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow (6n^2 - 1)(n+1) = \cancel{6n^3} + 6n^2 - n - 1 \geq \cancel{6n^3}$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 - n - 1 \geq 0$$

- prendiamo la diseq. in $\mathbb{R}$ associata: $6x^2 - x - 1 \geq 0 \quad \leadsto \quad x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 6n^2 - n - 1 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq \frac{1}{2}} = \mathbb{N}_{>0}$$

Approssimare e^{-1} con un errore non superiore a 10^{-4}

- sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di e^x in $x=0$ $e^x = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{c_x} x^{m+1}}{(m+1)!}$
 $\rho_{m,0}(x)$
N.B. c_x tra 0 e x

ERRORE

$$c_x \in]-1, 0[\Rightarrow e^{c_x} < e^0 = 1$$

- $|E_{m,0}(-1)| = |e^{-1} - \rho_{m,0}(-1)| = \left| \frac{e^{c_x} (-1)^{m+1}}{(m+1)!} \right| = \frac{e^{c_x}}{(m+1)!} < \frac{1}{(m+1)!}$
- $\Rightarrow$ basta determinare il più piccolo $m \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{(m+1)!} < 10^{-4} \leadsto (m+1)! > 10^4$
 $\Rightarrow m=7$ perché $7! = 5040$ e $8! = 40320$

- da $\begin{cases} \text{i)} & \rho_{7,0}(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} = 0,367857... \\ \text{ii)} & |E_{7,0}(-1)| < \frac{1}{40320} \sim 0,0000248 \\ \text{iii)} & e^{-1} - \rho_{7,0}(-1) = \frac{e^{c_x} (-1)^8}{8!} > 0 \end{cases}$

otteniamo $0,367857... = \rho_{7,0}(-1) < e^{-1} < \rho_{7,0}(-1) + E_{7,0}(-1) = 0,36788...$

EXTRA (per casa): approssimare $\sqrt{e}$ con 5 cifre decimali esatte

- $e^{1/2} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^k k!} + \frac{e^{c_x}}{2^{m+1} (m+1)!}$ $c_x \in (0, \frac{1}{2})$
vogliamo fino alla 4° cifra decimale!
- $\Rightarrow |E_{m,0}(\frac{1}{2})| < \frac{e^{1/2}}{2^{m+1} (m+1)!} < \frac{3^{1/2}}{2^{m+1} (m+1)!} < \frac{2}{2^{m+1} (m+1)!} = \frac{1}{2^m (m+1)!} < 10^{-5}$

- $2^m (m+1)! > 10^5 \leadsto$

m	1	2	3	4	5	6
$2^m (m+1)!$	4	24	192	1920	23040	322560

$322560 > 10^5$

- $\Rightarrow \dots = \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2^k k!} < \sqrt{e} < \sum_{k=0}^6 \frac{1}{2^k k!} + \frac{1}{322560} = \dots$

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n$ converge? E, in questi casi, quanto vale?

• serie geometrica di ragione $q = \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)$ (e $\alpha \neq 1$)

• $\Rightarrow \begin{cases} \text{CONVERGE} & \text{se } |q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right| < 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2} \\ \text{DIVERGE} & \text{se } q \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \\ \text{INDETERMINATA} & \text{se } q \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \leq -1 \Leftrightarrow \alpha > 1 \end{cases}$

• per $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2+\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1-\alpha}{-1-2\alpha} = \frac{\alpha-1}{2\alpha+1}$

Studiare il carattere delle seguenti serie e, quando possibile, calcolarne il valore:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1) • $a_n = \frac{n}{(n+1)!} > 0 \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow$ serie a termini positivi

• $(a_n \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty, \text{ quindi la condizione necessaria \u00e8 soddisfatta})$

• notiamo che $a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$ serie telescopica

$\Rightarrow$ se $S_N = \sum_{n=1}^N a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \dots = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(N+1)!}\right) = 1$

2) • come per la 1), abbiamo una serie a termini positivi e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

dove $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

• proviamo a ricondurci a una serie telescopica: $a_n = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{B}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow A(n+2) - nB = n(A-B) + 2A = 1 \quad \forall n \Rightarrow A=B \text{ e } A = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$

• $S_N = \sum_{n=1}^N a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N+1)(N+2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{1}{4}$

oppure $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right)$

SERIE
TELESCOPICA
DI MENGOLI

$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{4}$

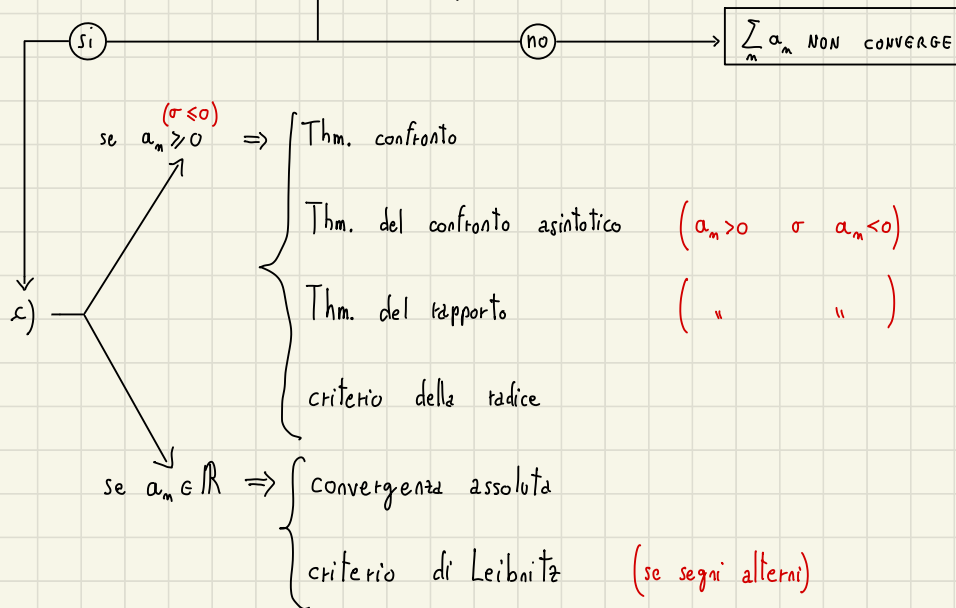
Studio delle serie $\sum a_n$

1. carattere della serie
2. somma/valore della serie (se possibile)

1. a) riconoscere serie particolari (geometrica, telescopica, ...)

b) verificare la condizione necessaria ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$)

se si riesce, perché non è
sempre immediato; altrimenti,
segue a posteriori se la serie
è convergente



2. a) serie geometrica / telescopica

b) sviluppi di Taylor di funzioni note

c) casi particolari