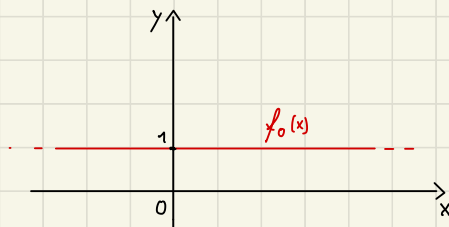


Data la funzione $f_\alpha(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}_{>0}\}$

- determinare $\text{Dom}(f_\alpha)$ e $\text{Imm}(f_\alpha)$
- rappresentarne il grafico
- discuterne iniettività, suriettività e biettività

CASO $\alpha = 0$

- $f_0(x) \equiv 1$, allora $\begin{cases} \text{Dom}(f_0) = \mathbb{R} \\ \text{Imm}(f_0) = \{1\} \end{cases}$



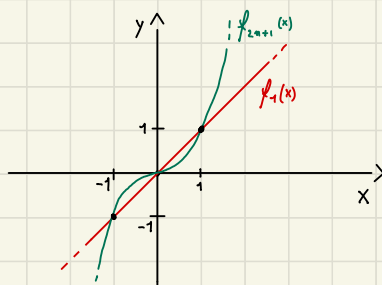
- $f_0(x)$ non è né iniettiva né suriettiva su $\mathbb{R}$ (quindi neppure biettiva)

↪ solo se ci restringiamo a $\{1\}$

CASO $\alpha = 2n+1, n \geq 0$

- $f_{2n+1}(x) = x^{2n+1} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f_{2n+1}) = \mathbb{R} \\ \text{Imm}(f_{2n+1}) = \mathbb{R} \end{cases}$

- f_{2n+1} è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ biettiva

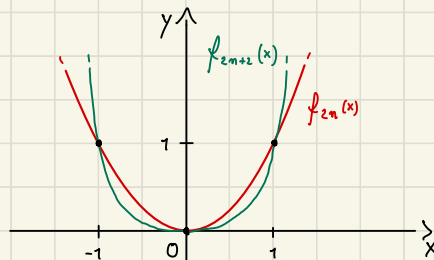


CASO $\alpha = 2n, n \geq 1$

- $f_{2n}(x) = x^{2n} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f_{2n}) = \mathbb{R} \\ \text{Imm}(f_{2n}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \end{cases}$

- f_{2n} non è iniettiva né suriettiva

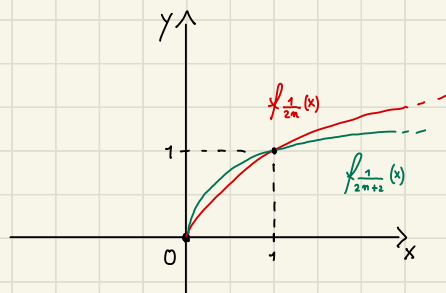
↪ solo se si restringe il codominio a $\mathbb{R}_{\geq 0}$



CASO $\alpha = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\bullet f_{\frac{1}{2n}}(x) = \sqrt[2n]{x} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f_{\frac{1}{2n}}) = \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \text{Imm}(f_{\frac{1}{2n}}) = \mathbb{R}_{\geq 0} \end{cases}$$

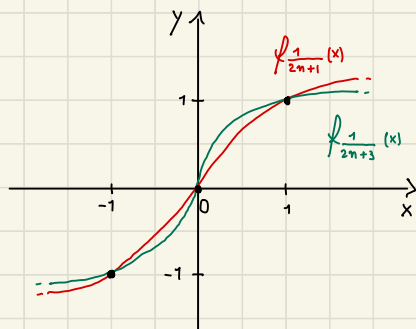
• è iniettiva, ma non suriettiva → solo se...



CASO $\alpha = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\bullet f_{\frac{1}{2n+1}}(x) = \sqrt[2n+1]{x} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dom}(f_{\frac{1}{2n+1}}) = \mathbb{R} \\ \text{Imm}(f_{\frac{1}{2n+1}}) = \mathbb{R} \end{cases}$$

• è iniettiva e suriettiva $\Rightarrow$ biettiva



Stabilire iniettività e suriettività delle seguenti funzioni

a) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

b) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{R}$

a) • prendiamo $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow (1-x)(1+y) = (1-y)(1+x)$

$$\Rightarrow \cancel{1+y-x-xy} = \cancel{1+x-y-xy} \Rightarrow 2y = 2x$$

$\Rightarrow$ otteniamo $x=y \Rightarrow f(x)$ iniettiva

• $y = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow 1-y = x(1+y) \Rightarrow \begin{cases} \text{se } y \neq -1, & \text{riusciamo ad ottenere } y = f(x) \text{ tramite } x = \frac{1-y}{1+y} \\ \text{se } y = -1, & \textcircled{2=0 \cdot x} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : f(x) = -1 \end{cases}$

IMPOSSIBILE

$\Rightarrow f(x)$ non è suriettiva (N.B. se restringiamo il codominio a $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è suriettiva)

b) • prendiamo $x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Rightarrow ax + b = ay + b \Rightarrow \begin{cases} \text{se } a \neq 0, & x = y \\ \text{se } a = 0, & 0 \cdot x = 0 \cdot y \quad \forall x, y \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)$ è iniettiva e suriettiva per $a \neq 0$ $\left(f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \right)$

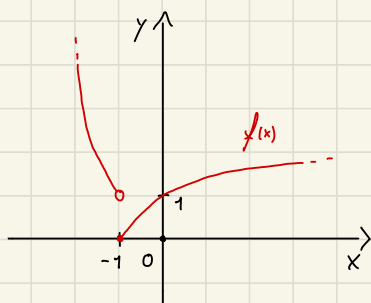
Date
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq -1 \\ x^2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \log(|x|-1)$$

determinare Dom e Imm di $f, g, (f \circ g), (g \circ f)$

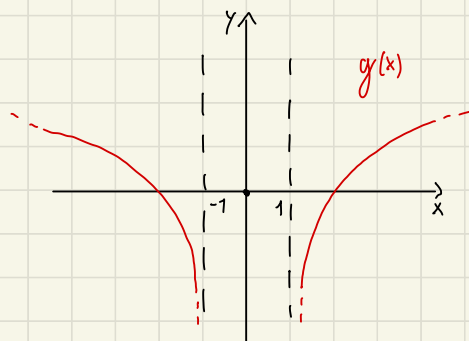
$A = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$f(A) = \text{Imm}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$



$B = \text{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : \overbrace{x > 1 \text{ o } x < -1}^{|x|-1 > 0}\}$

$g(B) = \text{Imm}(g) = \mathbb{R}$



$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in B : g(x) \in \overset{\mathbb{R}}{A}\} = B$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1} & \text{se } g(x) \geq -1 \text{ e } |x| > 1 \\ \log^2(|x|-1) & \text{se } g(x) < -1 \text{ e } |x| > 1 \end{cases}$$

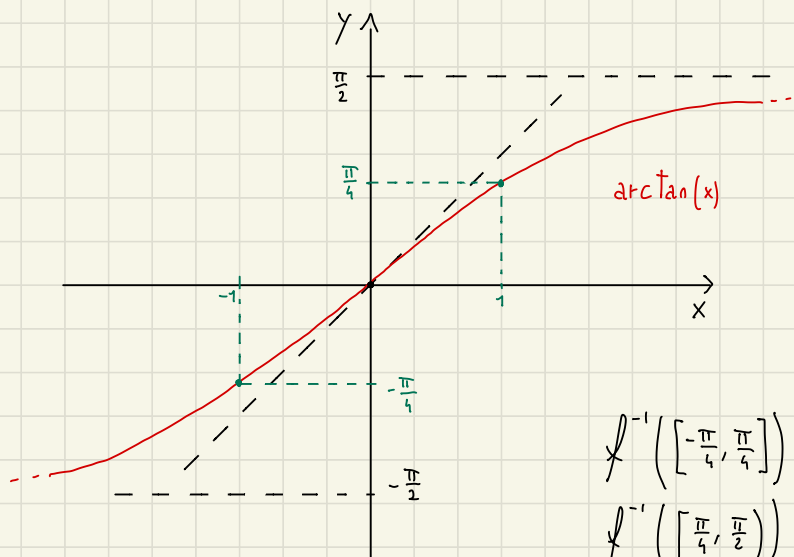
$\leadsto \text{N.B. } g(x) \geq -1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 + \frac{1}{e}$

$$= \begin{cases} \sqrt{\log(|x|-1)+1} & \text{se } (x \geq 1 + \frac{1}{e}) \vee (x \leq -1 - \frac{1}{e}) \\ \log^2(|x|-1) & \text{se } (-1 - \frac{1}{e} < x < -1) \vee (1 < x < 1 + \frac{1}{e}) \end{cases}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in A : f(x) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 1\} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \log(|\sqrt{x+1}| - 1) & \text{se } |f(x)| > 1 \text{ e } x \geq -1 \leadsto \text{se } x > 0 \\ \log(|x^2| - 1) & \text{se } |f(x)| > 1 \text{ e } x < -1 \leadsto \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Definire $f: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, rappresentare $\begin{cases} g^{-1}([0, \frac{\pi}{4}]) \text{ e } g^{-1}(\{\frac{\pi}{2}\}) \\ f^{-1}([\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) \text{ e } f^{-1}([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]) \end{cases}$
 $x \mapsto \arctan(x)$ $x \mapsto \arcsin(x)$

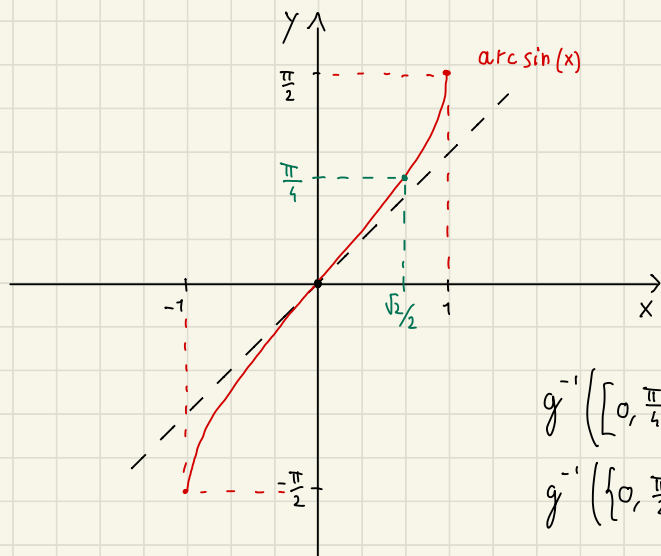


N.B. $\arctan(x)$ staz:

$\begin{cases} \text{SOTTO } y=x \text{ per } x > 0 \\ \text{SOPRA } " \text{ per } x < 0 \end{cases}$

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [-1, 1]$$

$$f^{-1}\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right), \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [1, +\infty[$$



N.B. $\arcsin(x)$ staz:

$\begin{cases} \text{SOTTO } y=x \text{ per } x < 0 \\ \text{SOPRA } " \text{ per } x > 0 \end{cases}$

$$g^{-1}\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[\sin(0), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$g^{-1}\left(\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}\right) = g^{-1}(0) \cup g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{0\} \cup \{1\}$$

Discutere per quali $n \in \mathbb{N}$ vale $P(n): "n! > 5^{n-1}"$

- passo induttivo sup. $n! > 5^{n-1} \Rightarrow (n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{\text{ipotesi induttiva}}{>} (n+1) \cdot 5^{n-1} \overset{\text{quando } n+1 \geq 5}{\geq} 5 \cdot 5^{n-1} = 5^{(n+1)-1}$
- qual è il caso base? Per i conti precedenti, dobbiamo verificare $P(n) \quad n \leq 4$

$$\left. \begin{array}{ll} P(4): 24 = 4! > 5^0 & \text{VERO} \\ P(3): 6 = 3! > 5^{-1} & " \\ P(2): 2 = 2! > 5^{-2} & " \\ P(1): 1 = 1! > 5^{-3} & " \\ P(0): 1 = 0! > 5^{-4} & " \end{array} \right\} \Rightarrow P(n) \text{ VERA per } n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dimostrare che $\forall n \geq 2 \quad r_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \overset{n \text{ volte}}{\neq} \mathbb{Q}$

- passo base: per $n=2$, $r_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Notiamo che $r_{n+1} = \sqrt{1 + r_n}$ e proviamo che $(\neg P(n+1) \Rightarrow \neg P(n))$

$$\text{Supp. che } r_{n+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}_{>0}: r_{n+1} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 1 + r_n \Rightarrow r_n = \frac{p^2 - q^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$$

Ma per ipotesi induttiva $r_n \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ ASSURDO che $r_n \in \mathbb{Q}$ e $r_n \notin \mathbb{Q} \Rightarrow r_{n+1} \notin \mathbb{Q}$

Sia $P(n): "n^3 + 5n \text{ è divisibile per } 6"$. Dimostrare che $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{>0}$

- passo base: $n=1$, $P(1): "6 \text{ è divisibile per } 6"$ VERO
- passo induttivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 3n^2 + 3n + 6 = \underbrace{(n^3 + 5n)}_{\text{Hp induttiva}} + \underbrace{3n(n+1)}_{n(n+1) \text{ è pari}} + 6$$

- $\Rightarrow P(n) \text{ VERA } \forall n \geq 1$