COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______	1 2 3 4 5	
MATRICOLA		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - PRIMA PARTE

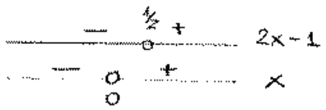
A.A. 2002-2003 — TRENTO, 12 NOVEMBRE 2002

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-1}{x} > x-2\}$ e sia $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2+x-2 < 0\}$. Determinate A e B. Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, e $A \setminus B$.

Risposta:

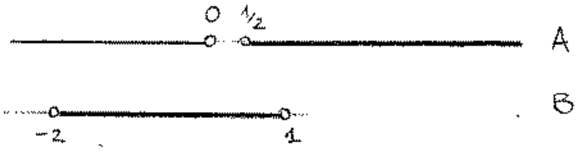
(a) $\dfrac{x^2-1}{x} > x-2 \iff \dfrac{x^2-1}{x} - x + 2 > 0 \iff \dfrac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}+2x}{x} > 0 \iff \dfrac{2x-1}{x} > 0$



$A =]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.

(b) $x^2+x-2<0$: $x^2+x-2=0 \iff x_{1/2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$B =]-2, 1[$.



$$\boxed{\begin{array}{l} A\cup B = \mathbb{R}; \\ A\cap B =]-2,0[\cup]\frac{1}{2},1[; \\ A\setminus B =]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[. \end{array}}$$

2) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti $P_1 = (1,-2)$ e $P_2 = (-1,3)$. Determinate poi l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il punto $P = (-1,0)$. Rappresentate graficamente r e r'.

Risposta:

$r: \quad \dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con $\underset{x_1,\,y_1}{P_1=(1,-2)}$ $\quad \underset{x_2,\,y_2}{P_2=(-1,3)}$

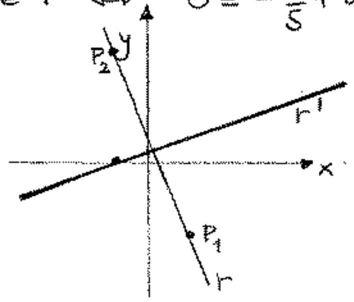
$\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{x-1} = \dfrac{3+2}{-1-1} \quad \Leftrightarrow \quad y+2 = -\dfrac{5}{2}(x-1)$

$y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{5}{2} - 2$

$\Rightarrow r: \quad \underline{y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}}$

$r': \quad y = \dfrac{2}{5}x + q \qquad P=(-1,0) \in r' \Leftrightarrow 0 = -\dfrac{2}{5} + q \Rightarrow q = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow r': \quad y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{2}{5}$



3) Disegnate nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x,y) soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 4(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4 \\ x^2 + y^2 + 2y \ge 0 \,. \end{cases}$$

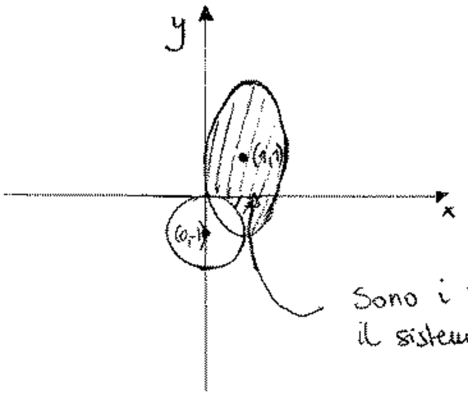
Risposta:

$4(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 4 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} \le 1$

$x^2 + y^2 + 2y \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (y+1)^2 \ge 1$

• $(x-1)^2 + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ è l'equazione dell'ellisse di centro $C=(1,1)$ e semiassi $a=1$, $b=2$.

•• $x^2 + (y+1)^2 = 1$ è l'equazione della circonferenza di centro $(0,-1)$ e raggio 1.



Sono i pt. del piano che soddisfano il sistema di disequazioni sopra.

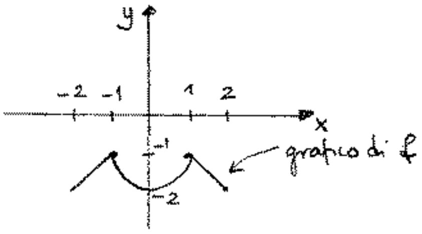
4) Sia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 \le x \le -1 \\ x^2 - 2 & \text{se } -1 < x < -1 \\ -x & \text{se } 1 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f.
ii) Determinate, se esistono, il massimo e/o minimo di f, e gli eventuali punti di massimo e/o minimo di f.
iii) f è pari? f è dispari? f è iniettiva?

Risposta:

i)



ii) $\max\limits_{[-2,2]} f = -1$ pt. di max sono $x = -1$ e $x = 1$

$\min\limits_{[-2,2]} f = -2$ pt. di min sono $x = -2$, $x = 0$, e $x = 2$.

iii) f è pari. f non è iniettiva: per esempio $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$ e

$f(-1) = f(1) = -1$.

5) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, rispettivamente. Determinate le funzioni

$$h(x) = (fg)(x)\,, \quad j(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)\,, \quad k(x) = (g \circ f)(x)\,, \quad l(x) = (f \circ g)(x)$$

e i loro insiemi di definizione.

Risposta:

$h(x) = f(x)g(x) = (3x+1)\sqrt[3]{x+1}$ def. su tutto $\mathbb{R}$;

$j(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x+1}{\sqrt[3]{x+1}}$ def. su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

$k(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{(3x+1)+1} = \sqrt[3]{3x+2}$ def. su tutto $\mathbb{R}$;

$l(x) = f(g(x)) = 3\left(\sqrt[3]{x+1}\right) + 1$ def. su tutto $\mathbb{R}$.