COGNOME		NON SCRIVERE QUI	B
NOME		1 2 3 4 5	
MATRICOLA			

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - PRIMA PARTE

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 12 NOVEMBRE 2002

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2+1}{x} < x+3\}$ e sia $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 < 0\}$. Determinate A e B. Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, e $A \setminus B$.

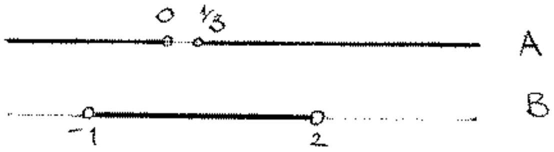
Risposta:

a) $\dfrac{x^2+1}{x} < x+3 \iff \dfrac{x^2+1}{x} - x - 3 < 0 \iff \dfrac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}-3x}{x} < 0 \iff \dfrac{1-3x}{x} < 0$

$A = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

b) $x^2 - x - 2 < 0$: $x^2 - x - 2 = 0 \iff x_{1/2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$B = \left]-1, 2\right[$.



$$\boxed{\begin{array}{l} A \cup B = \mathbb{R}; \\ A \cap B = \left]-1, 0\right[\cup \left]\frac{1}{3}, 2\right[; \\ A \setminus B = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[2, +\infty\right[. \end{array}}$$

2) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti $P_1 = (-1, 2)$ e $P_2 = (1, -3)$. Determinate poi l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il punto $P = (0, 1)$. Rappresentate graficamente r e r'.

Risposta:

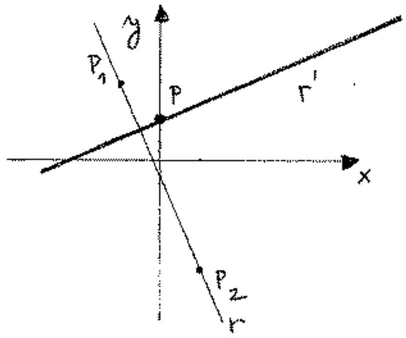
$r: \quad \dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ con $P_1 = (-1, 2)$ (x_1, y_1), $P_2 = (1, -3)$ (x_2, y_2)

$\iff \dfrac{y-2}{x+1} = \dfrac{-3-2}{1+1} \iff y-2 = -\frac{5}{2}(x+1) \qquad y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2} + 2$

$\Rightarrow r: \underline{y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$

$r': y = \frac{2}{5}x + q \qquad P = (0, 1) \in r' \iff 1 = 0 + q \Rightarrow q = 1$

$\Rightarrow r': \underline{y = \frac{2}{5}x + 1}$



3) Disegnate nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 9(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \\ x^2 + y^2 + 4y \geq 0 . \end{cases}$$

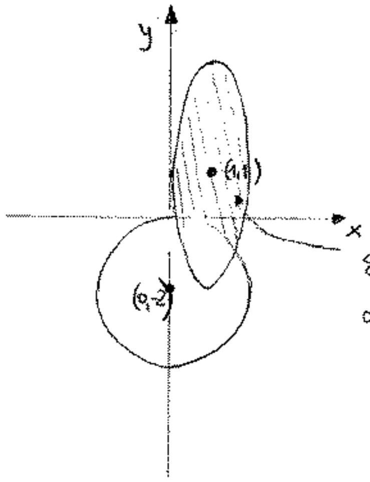
Risposta:

$9(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \iff (x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{9} \leq 1$

$x^2 + y^2 + 4y \geq 0 \iff x^2 + (y+2)^2 \geq 4$

- $(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ è l'eq. dell'ellisse di centro $(1, 1)$ e semiassi $a = 1$, $b = 3$.

•• $x^2 + (y+2)^2 = 4$ è l'eq. della circonferenza di centro $(0, -2)$ e raggio 2.



Sono i pt. del piano che soddisfano il sistema di disequazioni sopra.

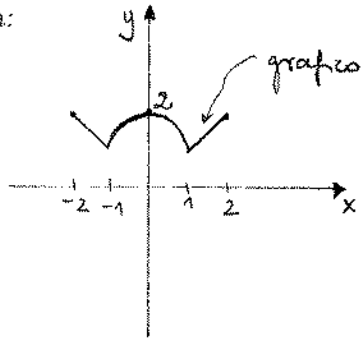
4) Sia $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -2 \le x \le -1 \\ -x^2+2 & \text{se } -1 < x < -1 \\ x & \text{se } 1 \le x \le 2 \,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente f.
ii) Determinate, se esistono, il massimo e/o minimo di f, e gli eventuali punti di massimo e/o minimo di f.
iii) f è pari? f è dispari? f è iniettiva?

Risposta:

i)



ii) $\max_{[-2,2]} f = 2$ pt. di max sono $x=-2$, $x=0$, e $x=2$

$\min_{[-2,2]} f = 1$ pt. di min sono $x=-1$ e $x=1$.

iii) f è pari; f non è iniettiva: per esempio $x_1=-1 \neq x_2=1$ e $f(x_1) = 1 = f(x_2)$.

5) Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 2x-1$ e $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, rispettivamente. Determinate le funzioni

$$h(x) = (fg)(x)\,, \quad j(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)\,, \quad k(x) = (g \circ f)(x)\,, \quad l(x) = (f \circ g)(x)$$

e i loro insiemi di definizione.

Risposta:

$h(x) = f(x)g(x) = (2x-1)\sqrt[3]{x+1}$ def. su tutto $\mathbb{R}$;

$j(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x-1}{\sqrt[3]{x+1}}$ def. su $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$;

$k(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{(2x-1)+1} = \sqrt[3]{2x}$ def. su tutto $\mathbb{R}$;

$l(x) = f(g(x)) = 2\sqrt[3]{x+1} - 1$ def. su tutto $\mathbb{R}$.