COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - SECONDA PARTE

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 5 DICEMBRE 2002

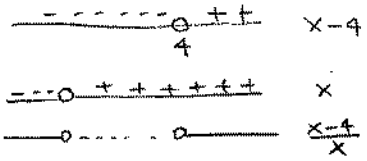
Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1a) Determinate l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log(\frac{x-4}{x})$.
Risolvete la disequazione
$$\log(\frac{x-4}{x}) > \log(1+x^2).$$

1b) Risolvete la disequazione
$$e^{4x+1} \geq \frac{1}{e}.$$

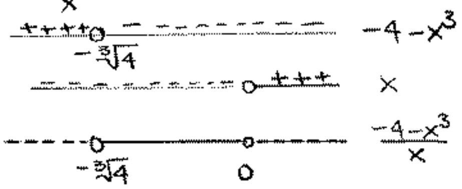
Risposta:

1a) $\frac{x-4}{x} > 0 \iff \underline{x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[}$



$\log\left(\frac{x-4}{x}\right) > \log(1+x^2) \iff \begin{cases} x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\\ \frac{x-4}{x} > 1+x^2 \end{cases}$

$\frac{x-4}{x} - 1 - x^2 > 0 \iff \frac{-4-x^3}{x} > 0$



$\underline{x \in]-\sqrt[3]{4}, 0[.}$

1b) $e^{4x+1} \geq \frac{1}{e} \iff 4x+1 \geq -1 \iff x \geq -\frac{1}{2}$

$\underline{x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[.}$

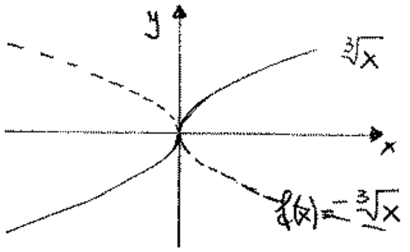
2) Usando le conoscenze sulle funzioni elementari, determinate l'insieme di definizione e tracciate il grafico delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = -\sqrt[3]{x}\,;$ $\qquad g(x) = -\sqrt[3]{x-1}\,;$

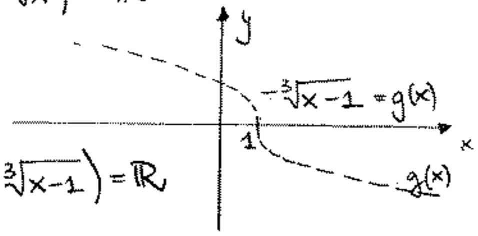
ii) $h(x) = e^{-2x} - 1\,;$ $\qquad k(x) = |e^{-2x} - 1|\,.$

Risposta:

i)

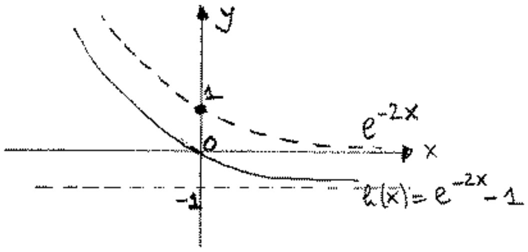


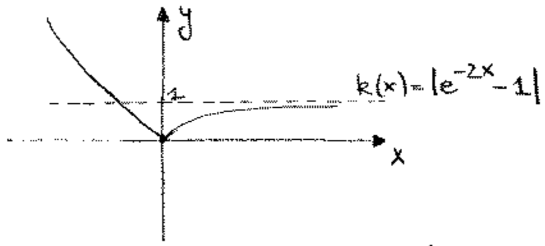
$\mathrm{dom}\left(-\sqrt[3]{x}\right) = \mathbb{R}$



$\mathrm{dom}\left(-\sqrt[3]{x-1}\right) = \mathbb{R}$

ii)





3) Sia $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \sqrt{x}\,.$

i) Determinate la funzione composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ e il suo insieme di definizione.

ii) Posto $h(x) = (g \circ f)(x)\,,$ calcolate $h'(4)\,.$

iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $(4, 1)\,.$ Rappresentate graficamente h e la retta tangente determinata precedentemente.

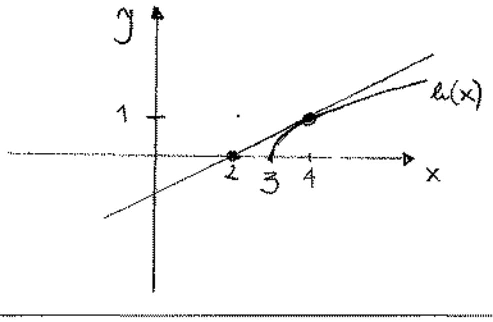
Risposta:

i) $(g \circ f)(x) = \underline{\sqrt{x-3}}$ $\qquad \mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\} = \underline{[3, +\infty[}\,.$

ii) $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ $\qquad \mathrm{dom}\, h' = \,]3, +\infty[\,.$ $\qquad h'(4) = \underline{\dfrac{1}{2}}\,.$

iii) $y = h(4) + h'(4)(x-4)$

$= 1 + \frac{1}{2}(x-4) = \frac{1}{2}x - 1\,, \Rightarrow \quad \underline{y = \frac{1}{2}x - 1}$



4) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=(x^2-3)e^x$.
i) Studiate il segno di f.
ii) Calcolate $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
iii) Dite se f è continua e se è derivabile.
iv) Studiate la monotonia di f.
v) Determinate, se esistono, il massimo e/o minimo e gli eventuali punti di massimo e/o minimo di f ristretta all'intervallo $[0,2]$.

Risposta:

i) $+++ \; -\sqrt{3} \; --- \; \sqrt{3} \; +++$ $\quad f$

ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underline{+\infty}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{0}$.

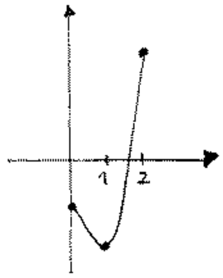
iii) somma e prodotto di funzioni continue e derivabili.

iv) $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2xe^x + (x^2-3)e^x = (x^2+2x-3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$

$++ \; -3 \; ------ \; 1 \; ++$ $\quad f'$

$\nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$ $\quad f$

v) f è continua su $[0,2]$; per Weierstrass esistono max e min



$f(0) = -3 \quad f(2) = e^2$

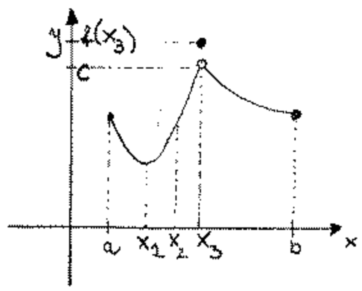
$x=1$ è pt. critico interno a $[0,2]$, $\quad f(1) = -2e$

$\min_{[0,2]} f = -2e$ $\quad$ pt. di min $x=1$

$\max_{[0,2]} f = e^2$ $\quad$ pt. di max $x=2$.

5) Considerando il grafico della funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in figura
i) dite se f è limitata e se è continua su $[a,b]$ (motivando la risposta);
ii) individuate gli intervalli di monotonia di f;
iii) individuate gli eventuali punti di massimo e/o minimo locale di f;
iv) dite se la derivata prima f' è positiva, negativa o nulla nei punti $x=x_1$ e $x=x_2$.

Risposta:



i) $f([a,b]) \subset [f(x_1), f(x_3)]$ e quindi limitata

Non è continua, perché $x = x_3$ è pt. di discontinuità.

ii) $[a, x_1]$, $[x_3, b]$ $\searrow$

$[x_1, x_3]$ $\nearrow$

iii) x_1, b pt. di min. locale (x_1 pt. di min)

a, x_3 pt. di max locale (x_3 pt. di max)

iv) $f'(x_1)=0 \qquad f'(x_2)>0$.