COGNOME ....

NOME ....

MATRICOLA ☐☐☐☐☐☐

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - SECONDA PARTE

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 5 DICEMBRE 2002

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1a) Determinate l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \log(\frac{x+4}{x})$.

Risolvete la disequazione

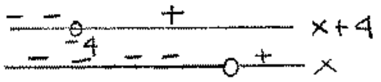
$$\log(1+x^2) < \log(\frac{x+4}{x}).$$

1b) Risolvete la disequazione

$$e^{3x-1} \le \frac{1}{e^2}.$$

Risposta:

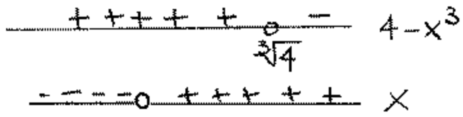
1a) $\frac{x+4}{x} > 0$ $\quad \underline{\underline{x \in \left]-\infty,-4\right[\cup \left]0,+\infty\right[}}.$



$$\log(1+x^2) < \log\left(\frac{x+4}{x}\right) \iff \begin{cases} 1+x^2 < \frac{x+4}{x} \\ x \in \left]-\infty,-4\right[\cup \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

(Nota: $1+x^2>0 \; \forall x$)

$$0 < \frac{x+4}{x} - 1 - x^2 \iff 0 < \frac{\cancel{x}+4-\cancel{x}-x^3}{x} = \frac{4-x^3}{x}$$



$$\underline{\underline{x \in \left]0, \sqrt[3]{4}\right[}}$$

1b) $e^{3x-1} \le \frac{1}{e^2} \iff e^{3x-1} \le e^{-2} \iff 3x-1 \le -2 \iff 3x \le -1$

$$\underline{\underline{x \in \left]-\infty, -1/3\right]}}.$$

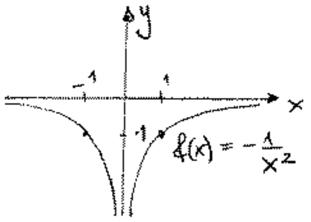
2) Usando le conoscenze sulle funzioni elementari, determinate l'insieme di definizione e tracciate il grafico delle seguenti funzioni:

i) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,;$ $\qquad g(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}\,;$

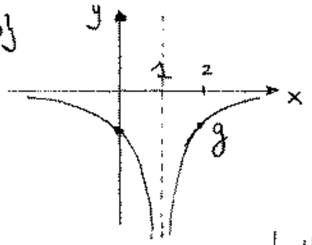
ii) $h(x) = \log(1-x)\,;$ $\qquad k(x) = |\log(1-x)|\,.$

Risposta:

i)

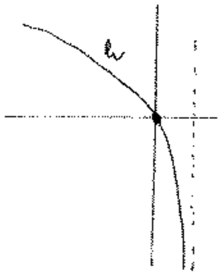


$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

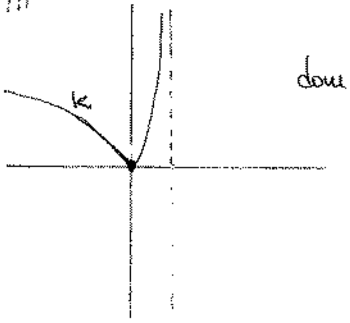


$\mathrm{dom}\, g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

ii)



$\mathrm{dom}\, h =]-\infty,-1[$



$\mathrm{dom}\, k =]-\infty,-1[$

3) Sia $f(x) = x-2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

i) Determinate la funzione composta $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ e il suo insieme di definizione.

ii) Posto $h(x) = (g\circ f)(x)$, calcolate $h'(3)$.

iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $(3,1)$. Rappresentate graficamente h e la retta tangente determinata precedentemente.

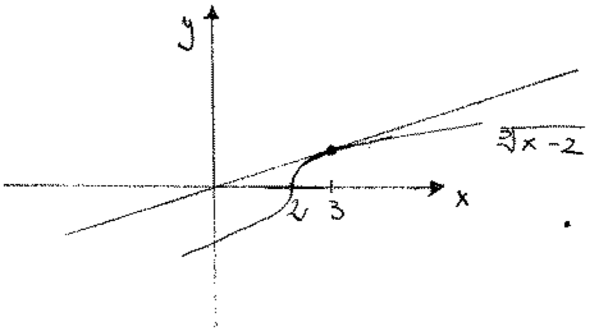
Risposta:

i) $(g\circ f)(x) = \sqrt[3]{x-2}$ $\qquad \mathrm{dom}\,(g\circ f) = \mathbb{R}$

ii) $h'(x) = \left[(x-2)^{1/3}\right]' = \frac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3(x-2)^{2/3}}$ $\qquad h'(3) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

iii) $y = h(3) + h'(3)(x-3)$

$= 1 + \frac{1}{3}(x-3) = \frac{1}{3}x$



4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (3 - x^2)e^x$.

i) Studiate il segno di f.

ii) Calcolate $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

iii) Dite se f è continua e se è derivabile.

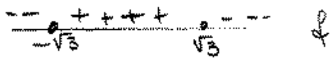
iv) Studiate la monotonia di f.

v) Determinate, se esistono, il massimo e/o minimo e gli eventuali punti di massimo e/o minimo di f ristretta all'intervallo $[0, 2]$.

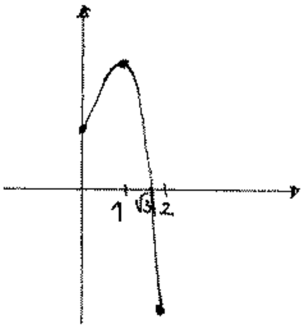
Risposta:

<u>OSS.</u> è $-f(x)$ dove $f(x)$ è la funzione di Fila Ⓐ 4)

i)



iv)



v)

$\min_{[0,2]} f = -e^2$ pt. di min $x = 2$

$\max_{[0,2]} f = 2e$ pt. di max $x = 1$.

5) Considerando il grafico della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in figura

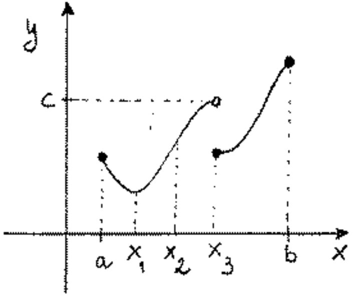
i) dite se f è limitata e se è continua su $[a, b]$ (motivando la risposta);

ii) individuate gli intervalli di monotonia di f;

iii) individuate gli eventuali punti di massimo e/o minimo locale di f;

iv) dite se la derivata prima f' è positiva, negativa o nulla nei punti $x = x_1$ e $x = x_2$.

Risposta:



i) $f([a,b]) \subset [f(x_1), f(b)]$ e quindi è limitata

Non è continua in $x = x_3$

ii) $[a, x_1]$ ↘

$[x_1, x_3[$, $[x_3, b]$ ↗

iii) x_1 pt. di min locale (x₁ pt. di min)

a, b pt. di max locale. (b pt. di max)

iv) $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) > 0$.