



2) Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ .

i) Studiate la funzione  $f$  (comportamento agli estremi del dominio, segno di  $f$ , monotonia,...) e tracciate il suo grafico.

ii) La funzione  $f$  ha massimo e/o minimo su  $\mathbb{R}$ ?

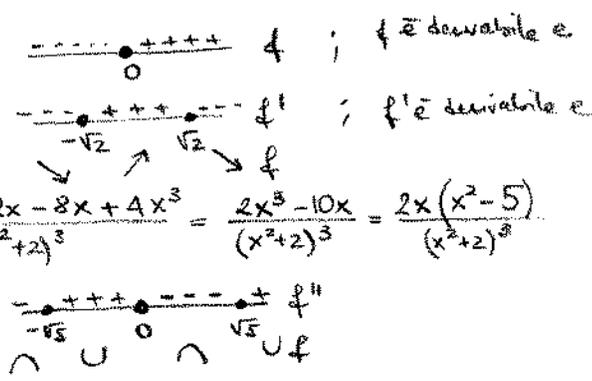
iii) Quanto vale  $\int_{-2}^2 f(x) dx$ ? (motivate la risposta).

Risposta: NOTA:  $f$  è dispari

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ; segno di  $f$

$$f'(x) = \frac{x^2+2 - 2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+2)^3 - (2-x^2)2(x^2+2)2x}{(x^2+2)^6} = \frac{-2x^3-2x-8x+4x^3}{(x^2+2)^3} = \frac{2x^3-10x}{(x^2+2)^3} = \frac{2x(x^2-5)}{(x^2+2)^3}$$



ii)  $\max_{\mathbb{R}} f = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\min_{\mathbb{R}} f = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

iii)  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$ , poiché  $f$  è dispari e l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

3) Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = e^x - x$ .

i) Studiate brevemente la funzione  $f$  e tracciate il suo grafico.

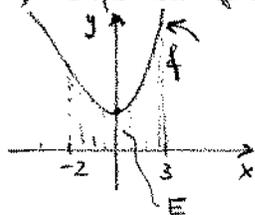
ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$ , dalle rette  $y = 0$ ,  $x = -2$ , e  $x = 3$ .

Risposta:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Inoltre  $f$  è sempre positiva.  $f$  è derivabile e

$$f'(x) = e^x - 1$$

$f''(x) = e^x > 0$ , e quindi  $f$  è convessa ed ha in  $x=0$  pt. di minima con  $f(0) = 1$



ii)  $\text{area}(E) = \int_{-2}^3 (e^x - x) dx$

$$= \left[ e^x - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^3 = e^3 - \frac{9}{2} - e^{-2} + 2 = \boxed{e^3 - \frac{1}{e^2} - \frac{5}{2}}$$

- 4) A Cammoro (un paese di montagna umbro) abitavano all'inizio del 1997 200 persone. Per tre anni consecutivi (periodo 1997-1999) la popolazione era cresciuta ad un tasso costante di 11% annuo. La mancanza di offerte di lavoro ha causato un calo del 28%\* nei due anni successivi (periodo 2000-2001). Quante persone abitavano a Cammoro all'inizio di quest'anno?

Risposta:

\* annuo

$$X = 200 \text{ persone}$$

$$\text{dopo 1 anno : } X + X \cdot \frac{11}{100} = X(1,11)$$

$$\text{dopo 3 anno } X(1,11)^3 = Y$$

$$\text{succ. anno } Y - Y \frac{28}{100} = Y(0,72)$$

$$\text{2° anno } Y(0,72)^2 = W$$

$$\text{nr. di persone all'inizio del 2002} = X(1,11)^3(0,72)^2 \approx X(1,3716)(0,5184) = \boxed{142}$$

- 5) Per il compitino di oggi (e quelli successivi!) ho preparato 12 esercizi diversi di studio di funzioni. Volendo assegnarvi solo due esercizi di questo tipo quanti compitini diversi (cioè con studio di funzioni diversi) potevano capitarvi?

Risposta:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{2 \cdot 10!} = \boxed{66}$$