| | |
|---|---|
| COGNOME ______________________ | NON SCRIVERE QUI |
| NOME ______________________ | 1 \| 2 \| 3 \| 4 \| 5 |
| MATRICOLA _______ | B |

# UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

## FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

## ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - TERZA PARTE

## A.A. 2002-2003 — TRENTO, 20 DICEMBRE 2002

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Calcolate

i) l'integrale definito $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}\,dx$;

ii) la derivata della funzione $f(x) = e^{-3x} - x^3$.

*Risposta:*

i) $$\int_1^3 \frac{x^2-2x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^3 \left(x^{3/2} - 2x^{1/2}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^3 = \frac{2}{5}\cdot 9\sqrt{3} - \frac{4}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\sqrt{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{18}{5}\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \frac{14}{15} = \boxed{-\frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{14}{15}}.$$

ii) $$\left(e^{-3x} - x^3\right)' = \boxed{-3e^{-3x} - 3x^2}.$$

2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+3}$.

i) Studiate la funzione $f$ (comportamento agli estremi del dominio, segno di $f$, monotonia,...) e tracciate il suo grafico.

ii) La funzione $f$ ha massimo e/o minimo su $\mathbb{R}$?

iii) Quanto vale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ ? (motivate la risposta).

*Risposta:*

NOTA: $f$ è dispari

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ; segno di $f$: $+++\overset{}{\underset{0}{\bullet}}------$ $f$ ; $f$ è derivabile e

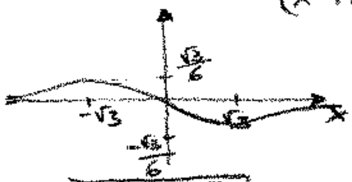
$$f'(x)=\frac{-1(x^2+3)+x\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{x^2-3}{(x^2+3)^2}$$

$++\underset{-\sqrt{3}}{\bullet}----\underset{\sqrt{3}}{\bullet}+++$ $f'$ ; $\nearrow\ \searrow\ \nearrow$ $f$ , $f'$ è derivabile e

$$f''(x)=\frac{2x(x^2+3)^{\cancel{2}}-(x^2-3)2\cancel{(x^2+3)}2x}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{2x^3+6x-4x^3+12x}{(x^2+3)^3}=\frac{18x-4x^3}{(x^2+3)^3}=\frac{2x(9-2x^2)}{(x^2+3)^3}$$

$+\underset{-3/\sqrt{2}}{\bullet}----\underset{0}{\bullet}+++\underset{3/\sqrt{2}}{\bullet}--$ $f''$

$\cup\ \ \frown\ \ \cup\ \ \frown$ $f$




ii) $\boxed{\max_{\mathbb{R}} f=\frac{\sqrt{3}}{6}}$ $\boxed{\min_{\mathbb{R}} f=-\frac{\sqrt{3}}{6}}$.

iii) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\boxed{0}$, poiché $f$ è dispari e l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'asse y

3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=e^x-ex$.

i) Studiate brevemente la funzione $f$ e tracciate il suo grafico.

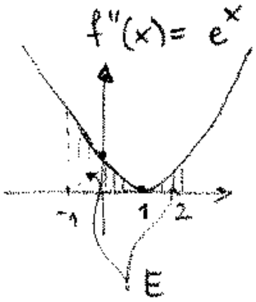
ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di $f$, dalle rette $y=0$, $x=-1$, e $x=2$.

*Risposta:*

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . $f$ è deriv. e $f'(x)=e^x-e$

$f(1)=0=\min_{\mathbb{R}} f$ (infatti $f\geq 0$ su $\mathbb{R}$) $--------\underset{1}{\bullet}++++$ $f'$ ; $\searrow\ \nearrow$

$f''(x)=e^x>0$ e quindi $f$ è convessa ed ha in $x=1$ pt. di min con $f(1)=0$




$$\text{area}(E)=\int_{-1}^{2}(e^x-ex)\,dx=\left[e^x-e\,\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=e^2-2e-e^{-1}+\frac{e}{2}=\boxed{e^2-\frac{1}{e}-\frac{3}{2}e}.$$

4) A Lavagna (un paese sulla costa ligure) abitavano all'inizio del 1997 1100 persone. Per due anni consecutivi (periodo 1997-1998) la popolazione era calata ad un tasso costante di 13% annuo. Con l'apertura di una clinica privata il paese è cresciuto ad un tasso del 24%* nei tre anni successivi (periodo 1999-2001). Quante persone abitavano a Lavagna all'inizio di quest'anno?

*Risposta:*

$x = 1100$ persone

* annuo

dopo 1 anno : $x - x \cdot \frac{13}{100} = x(0,87)$

dopo 2 anni : $x(0,87)^2 = y$

succ. 1° anno : $y + y \cdot \frac{24}{100} = y(1,24)$

⋮

3° anno : $y(1,24)^3 = w$

nr. di persone all'inizio del 2002 $= x(0,87)^2(1,24)^3 \simeq x(0,7569)(1,906624) \simeq \boxed{1587}$

5) Per il compitino di oggi (e quelli successivi!) ho preparato 16 esercizi diversi sull'integrazione. Volendo assegnarvi solo tre esercizi di questo tipo quanti compitini diversi (cioè con calcoli di integrali diversi) potevano capitarvi?

*Risposta:*

$$C_{16,3} = \frac{16!}{3!\,13!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cancel{13!}}{3!\,\cancel{13!}} = \frac{16 \cdot \cancel{15}^{5} \cdot \cancel{14}^{7}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \boxed{35 \cdot 16}$$