COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______	1 2 3 4 5	
MATRICOLA ______		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - TERZA PARTE

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 9 GENNAIO 2003

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Calcolate

i) l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 (\frac{x^2+3}{x} + e^x)\,dx$;

ii) la derivata prima della funzione $f(x) = \log(1+x^2) + x^3$.

Risposta:

i) $$\int_1^2 \left(\frac{x^2+3}{x} + e^x\right) dx = \int_1^2 \left(x + \frac{3}{x} + e^x\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3\log x + e^x\right]_1^2 =$$
$$= \left[\frac{4}{2} + 3\log 2 + e^2\right] - \left[\frac{1}{2} + e\right] =$$
$$= \underline{\frac{3}{2} + 3\log 2 + e^2 - e}\,.$$

ii) $$f'(x) = \underline{\frac{2x}{1+x^2} + 3x^2}\,.$$

2) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

i) Studiate la funzione f (comportamento agli estremi del dominio, segno di f, monotonia, massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.

ii) La funzione f è limitata su $\mathbb{R}$? La funzione f ha massimo e/o minimo su $\mathbb{R}$? Motivate le risposte.

iii) Calcolate l'integrale definito $\displaystyle\int_1^3 (x^2+1)^2 f(x)\,dx$.

Risposta: f è pari !

i) $f(x)\geq 0$ e $=0 \iff x=0$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$

f è derivabile e $f'(x)=\dfrac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$- - - - \overset{0}{\bullet} + + + +$ f'

$\searrow \quad \nearrow$ f

$x=0$ pt. di min locale.

f' è derivabile e $f''(x)=\dfrac{4(x^2+1)^{\cancel{2}}-4x\cdot 2\cancel{(x^2+1)}2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}}=\dfrac{4x^2+4-16x^2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$

$=\dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

$- - \underset{-1/\sqrt{3}}{\bullet} + + + + + \underset{1/\sqrt{3}}{\bullet} - - - - -$ f''

$\frown \quad \smile \quad \frown$ f

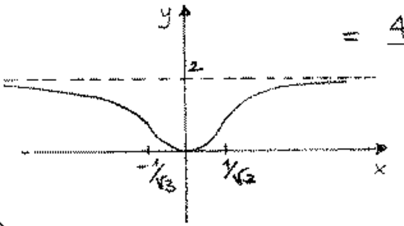


grafico di f.

ii) f è limitata, perché $f(\mathbb{R})\subset[0,2[$. f ha minimo su $\mathbb{R}$, e $\min\limits_{\mathbb{R}} f=0=f(0)$. f non ha massimo su $\mathbb{R}$.

iii) $\displaystyle\int_1^3 (x^2+1)^2 f(x)\,dx=\int_1^3 (x^2+1)^{\cancel{2}}\cdot\frac{2x^2}{\cancel{(x^2+1)}}\,dx=2\int_1^3 (x^4+x^2)\,dx=2\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\underline{\underline{2\left(\frac{3^5}{5}+\frac{3^3}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)}}$.

---

3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=x^2(1-x^2)$.

i) Studiate brevemente la funzione f e tracciate il suo grafico.

ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dell'asse delle x.

Risposta: f è pari !

i)

$+ + + \overset{0}{\bullet} + + +$ x^2

$- - - \underset{-1}{\bullet} + + + \underset{1}{\bullet} - - -$ $1-x^2$

$\cdots\bullet\cdots\bullet\cdots\bullet\cdots$ f segno

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$

f è derivabile e $f'(x)=2x(1-x^2)-2x^3=2x(1-x^2-x^2)$
$=2x(1-2x^2)$

$+ + + \underset{-1/\sqrt{2}}{\bullet} - - \underset{0}{\bullet} + + \underset{1/\sqrt{2}}{\bullet} - - -$ f'

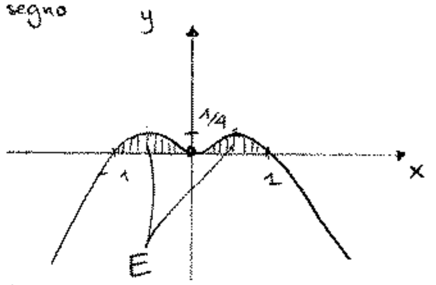
$\nearrow \; \searrow \; \nearrow \; \searrow$ f

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ pt. di max loc.

$x=0$ pt. di min locale.

$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

$f(0)=0$



ii) $\displaystyle \text{area } E=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\boxed{\frac{4}{15}}$.

f è pari
e l'insieme di integrazione
è simmetrico rispetto all'asse y

---

4) In un esperimento ripetuto due volte di un gruppo A di cavie si ha alla prima volta una perdita del 15% mentre alla volta successiva si osserva una crescita dell' 8%; di un gruppo B di cavie invece si osserva inizialmente una crescita dell' 8% mentre alla seconda volta si nota una diminuzione del 4%. Se all'inizio dell'esperimento il gruppo B contava 85 cavie e alla fine dell'esperimento entrambi i gruppi coincidono, quanti erano gli elementi del gruppo A in partenza?

Risposta:

A

dopo la 1^a volta $= A - A\cdot\frac{15}{100} = A\cdot\frac{85}{100}$

dopo la 2^a volta $= A\cdot\frac{85}{100}\cdot\frac{108}{100}$

B

dopo la 1^a volta $= B + B\cdot\frac{8}{100} = B\cdot\frac{108}{100}$

dopo la 2^a volta $= B\cdot\frac{108}{100}\cdot\frac{96}{100}$

$$A\cdot\frac{\cancel{85}}{\cancel{100}}\cdot\frac{\cancel{108}}{\cancel{100}} = \cancel{85}\cdot\frac{\cancel{108}}{\cancel{100}}\cdot\frac{96}{\cancel{100}} \Rightarrow \underline{\underline{A = 96}}.$$

5) Una parte dell'esame di Analisi Matematica consiste in un lavoro scritto da svolgere in gruppi, ciascuno gruppo formato da 3 studenti. Se la classe è formata da 18 studenti, quanti sono i possibili gruppi che possono essere formati? Indicate la formula da utilizzare senza svolgere i conti.

Risposta:

$$C_{18,3} = \frac{18!}{3!\,(18-3)!} = \frac{18!}{3!\,15!} = \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot \cancel{15!}}{3!\,\cancel{15!}} = \frac{\overset{3}{\cancel{18}}\cdot 17\cdot 16}{\cancel{6}} = \underline{\underline{3\cdot 17\cdot 16}}$$