COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 9 GENNAIO 2003

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

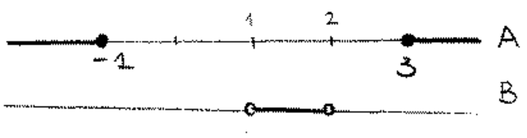
1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x - 3 \geq 0\}$ e sia $B = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{1}{x-1} > 1\}$. Determinate gli insiemi A e B. Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

Risposta:

vedi Fila A

$A =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

$B =]1, 2[$



$A \cup B =]-\infty, -1] \cup]1, 2[\cup [3, +\infty[$

$A \cap B = \emptyset$.

2) Siano $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x)=e^x+3x^2, \qquad g(x)=x^3.$$

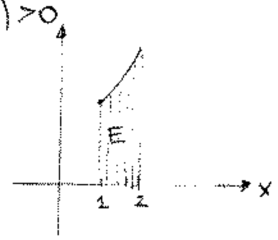
i) Determinate la funzione composta $h(x)=f(g(x))$.
ii) Determinate la derivata prima delle funzioni $f(x)$, $g(x)$ ed $h(x)$.
iii) Determinate l'area delimitata dal grafico della funzione f, dalle rette $y=0$, $x=1$, e $x=2$.

Risposta:

i) $h(x)=f(g(x))=f(x^3)=\underline{e^{x^3}+3x^6}$.

ii) $f'(x)=\underline{e^x+6x}$, $g'(x)=\underline{3x^2}$, $h'(x)=\underline{3x^2e^{x^3}+18x^5}$.

iii) $f(x)>0$

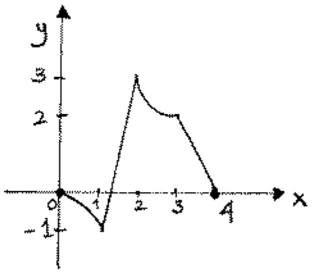


$$\text{area } E=\int_1^2 (e^x+3x^2)\,dx=\left[e^x+\cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\right]_1^2=$$

$$=e^2+8-e-1=\underline{e^2-e+7}.$$

3) Sia $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ la funzione rappresentata nella figura sotto.
i) Determinate gli eventuali massimi e/o minimi locali di f, e gli eventuali punti di massimo e/o minimo locale di f.
ii) Rappresentate graficamente le seguenti funzioni: $-f(x)$, $|f(x)|$ e $f(x)-1$.

Risposta:

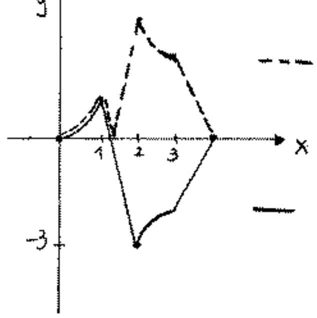


i) $M=0$, 3 massimi locali di f

$x=0$, $x=2$ pt. di max locale

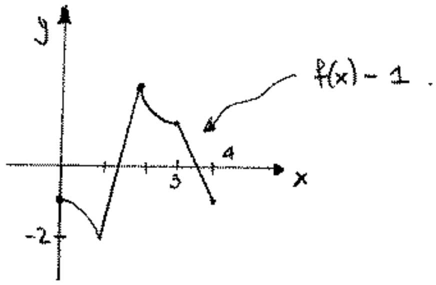
$m=-1$, $m=0$ minimi locali di f

$x=1$, $x=4$ pt. di min. locale



--- $|f(x)|$

— $-f(x)$



4) S~~s~~ia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2(x^2-1)$.
i) Studiate la funzione f (comportamento agli estremi del dominio, segno di f, monotonia, massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.
ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Risposta: f pari!

i) $+ + + \overset{0}{\bullet} + + +$ $\quad x^2$

$+ + \underset{-1}{\bullet} - - - - - - \underset{1}{\bullet} + +$ $\quad x^2-1$

$+ \bullet - - \bullet - - \bullet +$ $\quad f$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

f è derivabile e $f'(x) = 2x(x^2-1) + x^2 \cdot 2x = 2x(x^2-1) + 2x^3 = 2x(2x^2-1)$

$- - \underset{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\bullet} + + \underset{0}{\bullet} - - \underset{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\bullet} + + +$ $\quad f'$

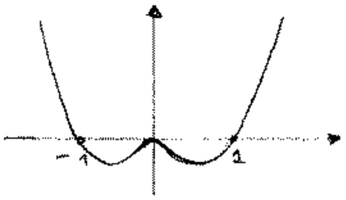
$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$ $\quad f$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pt. di min locale

$x = 0$ pt. di max loc.

$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$

$f(0) = 0$



ii) se $k < -\frac{1}{4}$ $\quad f(x) = k$ non ha soluzioni
$k = -\frac{1}{4}$ $\quad f(x) = k$ ha 2 soluzioni
$-\frac{1}{4} < k < 0$ $\quad f(x) = k$ ha 4 soluzioni
$k = 0$ $\quad f(x) = k$ ha 3 soluzioni
$k > 0$ $\quad f(x) = k$ ha 2 soluzioni.

5) In un esperimento ripetuto due volte di un gruppo A di cavie si ha alla prima volta una crescita del 15% mentre alla volta successiva si osserva una perdita dell' 8%; di un gruppo B di cavie invece si osserva inizialmente una perdita dell' 8% mentre alla seconda volta si nota una crescita del 4%. Se all'inizio dell'esperimento il gruppo A contava 208 elementi e alla fine dell'esperimento entrambi i gruppi coincidono, quanti erano gli elementi del gruppo B in partenza?

Risposta:

vedi Fila B terza parte $\underline{\underline{B = 230}}$.