COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA - TERZA PARTE

A.A. 2002-2003 — TRENTO, 9 GENNAIO 2003

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Calcolate

i) l'integrale definito $\int_1^3 (e^x + \frac{2+x^2}{x})\, dx$;

ii) la derivata prima della funzione $f(x) = \log(1+x^4) - x^2$.

Risposta:

i) $\int_1^3 \left(e^x + \frac{2+x^2}{x}\right) dx = \int_1^3 \left(e^x + \frac{2}{x} + x\right) dx = \left[e^x + 2\log x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$

$= \left[e^3 + 2\log 3 + \frac{9}{2}\right] - \left[e + 2\log 1 + \frac{1}{2}\right]$

$= e^3 - e + 2\log 3 + \frac{8}{2}$

$= \underline{e^3 - e + 2\log 3 + 4}$

ii) $f'(x) = \underline{\frac{4x^3}{1+x^4} - 2x}$.

2) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{-x^2}{3x^2+1}$.

i) Studiate la funzione f (comportamento agli estremi del dominio, segno di f, monotonia, massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.

ii) La funzione f è limitata su $\mathbb{R}$? La funzione f ha massimo e/o minimo su $\mathbb{R}$? Motivate le risposte.

iii) Calcolate l'integrale definito $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+1)^2 f(x)\,dx$.

Risposta:

f è pari!

i) $f(x) \le 0$ e $=0 \iff x=0$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$.

$+\,+\,+\,+\,0\,-\,-\,-\,-$ $f'(x)$

$\nearrow$ $\searrow$ $f(x)$

$x=0$ è pt. di max loc.

f è derivabile e $f'(x) = \dfrac{-2x(3x^2+1) + x^2\cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(3x^2+1)^2}$

f' è derivabile e $f''(x) = \dfrac{-2(3x^2+1)^{\cancel{2}} + 2x\cdot 2\cancel{(3x^2+1)}\,6x}{(3x^2+1)^{\cancel{4}\,3}} = \dfrac{-6x^2-2+24x^2}{(3x^2+1)^3} = \dfrac{18x^2-2}{(3x^2+1)^3} = \dfrac{2(9x^2-1)}{(3x^2+1)^3}$

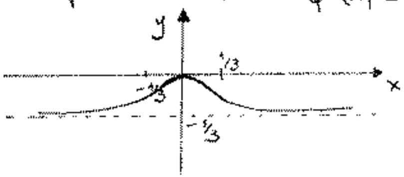


grafico di f.

$+\,+\,\bullet\,-\,-\,-\,-\,-\,\bullet\,+\,+\,+\,+$ $f''(x)$

$\cup$ $-\frac{1}{3}$ $\cap$ $\frac{1}{3}$ $\cup$ $f(x)$

ii) f è limitata, perchè $f(\mathbb{R}) \subset \left]-\frac{1}{3}, 0\right]$. f ha massimo in $\mathbb{R}$, e $\max_{\mathbb{R}} f = 0 = f(0)$. f non ha minimo in $\mathbb{R}$.

iii) $\displaystyle\int_1^2 (3x^2+1)^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2+1)^{\cancel{2}} \cdot \frac{(-x^2)}{\cancel{(3x^2+1)}}\,dx = -\int_1^2 (3x^4+x^2)\,dx = -\left[3\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = -\left[3\cdot\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - \frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right]$.

---

3) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2(4-x^2)$.

i) Studiate brevemente la funzione f e tracciate il suo grafico.

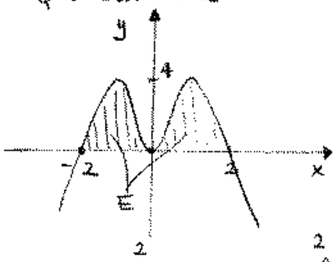
ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dell'asse delle x.

Risposta:

f è pari!

i) $-\,-\,-\,\bullet\,+\,+\,\bullet\,+\,+\,\bullet\,-\,-\,-$ f (-2, 2) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

f è derivabile e $f'(x) = 2x(4-x^2) - 2x^3 = 2x(4-x^2-x^2) = 2x(4-2x^2) = 4x(2-x^2)$



$+\,+\,+\,\bullet\,-\,-\,\bullet\,+\,+\,\bullet\,-\,-\,-\,-$ f'

$-\sqrt{2}$ 0 $\sqrt{2}$

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$ f

$x=-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ sono pt. di max locale.

$x=0$ pt. di min locale.

$f(\pm\sqrt{2}) = 2(4-2) = 4$ $f(0) = 0$.

ii) area $E = \displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx = 2\int_0^2 (4x^2-x^4)dx = 2\left[4\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$

f è pari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'asse y

$= 2\left[4\cdot\frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5}\right] = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{4\cdot 32}{15} = \boxed{\frac{128}{15}}$.

4) In un esperimento ripetuto due volte di un gruppo A di cavie si ha alla prima volta una crescita del 15% mentre alla volta successiva si osserva una perdita dell' 8%; di un gruppo B di cavie invece si osserva inizialmente una perdita dell' 8% mentre alla seconda volta si nota una crescita del 4%. Se all'inizio dell'esperimento il gruppo A contava 208 elementi e alla fine dell'esperimento entrambi i gruppi coincidono, quanti erano gli elementi del gruppo B in partenza?

Risposta:

A dopo la 1^a volta $= A + A \cdot \frac{15}{100} = A \cdot \frac{115}{100}$

dopo la 2^a volta $= A \cdot \frac{115}{100} \cdot \frac{92}{100}$.

B dopo la 1^a volta $= B \cdot \frac{92}{100}$

dopo la 2^o volta $= B \cdot \frac{92}{100} \cdot \frac{104}{100}$.

$$\overset{2}{\cancel{208}} \cdot \frac{115}{\cancel{100}} \cdot \frac{9\cancel{2}}{\cancel{100}} = B \cdot \frac{9\cancel{2}}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{104}}{\cancel{100}}$$

$B = \underline{\underline{230}}$.

5) Una parte dell'esame di Analisi Matematica consiste nello svolgimento di un tema generale diverso per ciascuno studente. Se la classe è formata da 10 studenti, e se il docente ha preparato 10 temi distinti, quante sono le possibili assegnazioni differenti dei compiti? Indicate la formula da utilizzare senza svolgere i conti.

Risposta:

$$P_{10} = \underline{\underline{10!}}$$