Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Non scrivere qui

B

1	2	3	4	5

Università di Trento — Polo di Rovereto

Facoltà di Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva Applicata

Esame scritto di Analisi Matematica

A.A. 2002-2003 — Trento, 6 Febbraio 2003

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.
Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x \cancel{}| < \overset{3}{\cancel{2}}\}$ e sia $B = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-1}{x} \leq x\}$. Determinate A e B. Determinate $A \setminus B$ e $A \cap B$.

Risposta:

$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\} = \underline{]-3,3[}$.

$B = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-1}{x} \leq x\} = \underline{]0,+\infty[}$.

$\dfrac{x^2-1}{x} - x \leq 0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{-1}{x} \leq 0$

$\Longleftrightarrow x > 0$

$A \setminus B = \underline{]-3,0]}$.

$A \cap B = \underline{]0,3[}$.

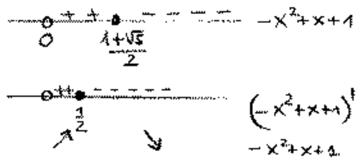
2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + x + 1 & \text{se } x > 0 . \end{cases}$$

i) Dopo avere rappresentato graficamente la funzione $f(x)$, tracciate il grafico delle funzioni $-f(x)$ e $f(x-1)$.
ii) Determinate gli eventuali punti di massimo e/o minimo locale di f su $\mathbb{R}$.
iii) Dite se f è iniettiva (motivate la risposta).

Risposta:

i) $-x^2+x+1=0 \iff x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$



$(-x^2+x+1)' = -2x+1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$

$(-x^2+x+1)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1 = \frac{5}{4}$

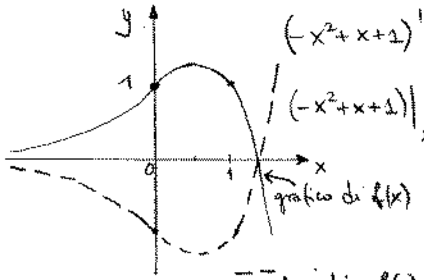
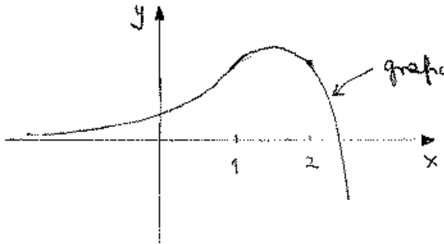


grafico di $-f(x)$

ii) $x = \frac{1}{2}$ pt. di massimo locale di f su $\mathbb{R}$.

iii) f non è iniettiva; per esempio $x=0 \neq x=1$ e $f(0) = f(1)$.



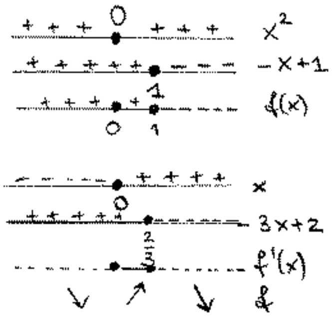
3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = -x^3 + x^2$.
i) Studiate la funzione f (comportamento agli estremi del dominio, segno di f, monotonia, eventuali massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.
ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$.
iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata ~~dalla retta tangente~~ dal grafico della funzione f e dalla retta $y = 0$.

Risposta:

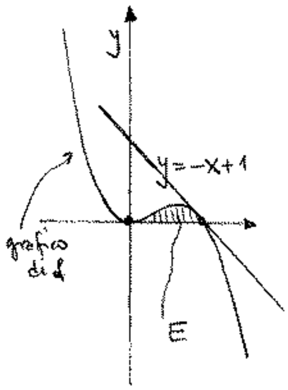
i) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\quad f(x) = x^2(-x+1)$

f è derivabile e $f'(x) = -3x^2+2x = x(-3x+2)$

$f(0)=0 \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$,



$x=0$ pt. di min loc.,
$x=\frac{2}{3}$ pt. di max loc.



ii) $y = f(1) + f'(1)(x-1) = -(x-1) = \underline{\underline{-x+1}}$.

iii) $\text{area}(E) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^3+x^2)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$.

4) In una scuola elementare viene fatto un test d'ingresso sulla conoscenza della Lingua Italiana. Il numero di partecipanti è di 972 bambini di cui 650 di madrelingua italiana, 151 di madrelingua di origine slava, 107 di madrelingua di origine asiatica ed i restanti di madrelingua africana. Se la percentuale di superamento del test con successo è del 91% per i bambini di madrelingua italiana, del 51% per i bambini di madrelingua di origine slava, e del 42% per i restanti bambini, qual è la percentuale dei bambini che superano con esito positivo il test?

Risposta:

Bambini di madrelingua italiana che superano il test $= 650 \cdot \frac{91}{100} = 591$

Bambini di madrelingua di origine slava che superano il test $= 151 \cdot \frac{51}{100} = 77$

Restanti bambini che superano il test $= 171 \cdot \frac{42}{100} = 71$

Totale bambini che superano il test $= \underline{\underline{739}}$

Percentuale dei bambini che superano il test $= \underline{\underline{76\%}}$.

5) Per il riscaldamento prima di una gara un atleta può scegliere 6 esercizi da una rosa di 15 esercizi. In quanti modi può avvenire il riscaldamento se non si tiene conto anche della sequenza nella quale vengono eseguiti gli esercizi?

Risposta:

$$C_{15,6} = \frac{15!}{6!\,(15-6)!} = \frac{15!}{6!\,9!} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 13 \cdot \cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = \underline{\underline{35 \cdot 13 \cdot 11}}.$$