

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO
FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA
A.A. 2002-2003 — TRENTO, 27 MAGGIO 2003

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento** (o traccia dello svolgimento).

1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 + 1}{x + 1} \geq 1 - x\}$ e sia $B = \{x \in \mathbb{R} : x|x| - 1 > 0\}$.

i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli graficamente sulla retta reale.

ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

iii) Dite se gli insiemi A e B sono limitati e/o disgiunti.

Risposta:

- 2) Sia r la retta con pendenza $m = 2$ e passante per il punto $P = (-1, 2)$, e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x - 2)^2$.
- Rappresentate graficamente r ed f .
 - Scrivete l'equazione della retta tangente r' al grafico di f nel punto $(0, 4)$.
 - Determinate l'area della regione delimitata dalle rette r , r' ed $y = 0$.
 - Determinate l'area della regione delimitata dalle rette r ed $y = 0$ e dal grafico di f .

Risposta:

-
- 3) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = x(x^2 - 1)$.
- Studiate brevemente g (comportamento agli estremi del dominio, segno di g , monotonia, massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.
 - Calcolate $\int_{-1}^2 g(x) dx$.
 - Sia $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x & \text{se } x \geq 0, \\ g(x) + c & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

ix) Determinate c tale che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

iv) Per tale valore di c disegnate la funzione $f(x)$, e poi le funzioni $f(x) - 1$ e $-f(x)$.

Risposta:

- 4) Nell'anno 1999 il numero di frequentanti delle palestre provinciali è aumentato del 20%, nel 2000 del 35%, mentre è rimasto invariato nel 2001 e ha subito un calo del 5% nel 2002. A quanto ammonta l'incremento complessivo (in percentuale) di frequentanti nel periodo 1999-2002?
-

Risposta:

-
- 5) Per preparare un test psicologico formato da 10 quesiti gli studiosi possono scegliere per i primi 5 quesiti da una rosa di 30 quesiti, per i quesiti da 6 ad 8 da una rosa di 15 quesiti, mentre per quelli rimanenti da una rosa di 20 quesiti. Quanti sono i possibili test diversi che possono essere preparati in queste ipotesi? Indicate la formula da utilizzare senza svolgere i conti.
-

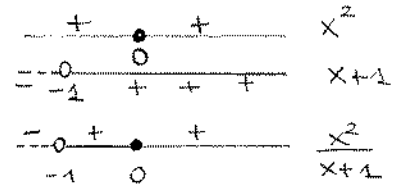
Risposta:

Università di Trento - POLO DI ROVERETO
 Facoltà di Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva Applicata
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA
 a.a. 2002/03 - Trento, 27/05/03

$$1) i) x \in A \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x+1} - 1 + x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1 - x - 1 + x^2 + x}{x+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2}{x+1} \geq 0$$

$$A =]-1, +\infty[$$

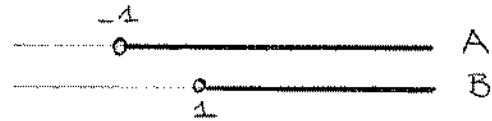


$$x \in B \Leftrightarrow x|x|-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < -1 \end{cases}$$

$$B =]1, +\infty[$$



$$ii) A \cup B =]-1, +\infty[\quad (\text{nota: } B \subset A)$$

$$A \cap B =]1, +\infty[$$

$$A \setminus B =]-1, 1]$$

iii) $N\bar{e} A$ $n\bar{e} B$ \bar{e} limitato ; $A \in B$ non sono disgiunti. ■

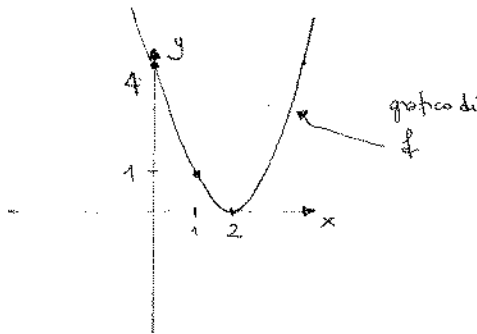
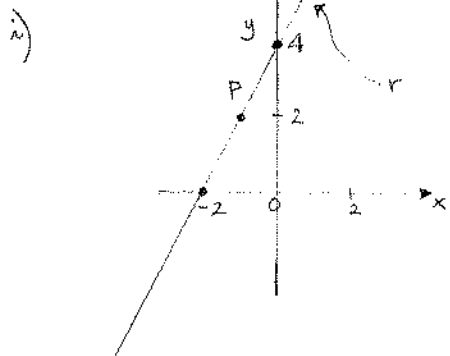
2) retta r con pendenza $m=2$ e passante per il pt. $P=(-1,2)$:

$$r : y = 2x + b \quad \text{con } b \in \mathbb{R} \text{ da determinare tale che } P \text{ appartenga alla retta } r, \text{ ossia}$$

$$2 = 2(-1) + b$$

$$\Rightarrow b = 4.$$

L'eq. della retta r \bar{e} dunque $y = 2x + 4.$



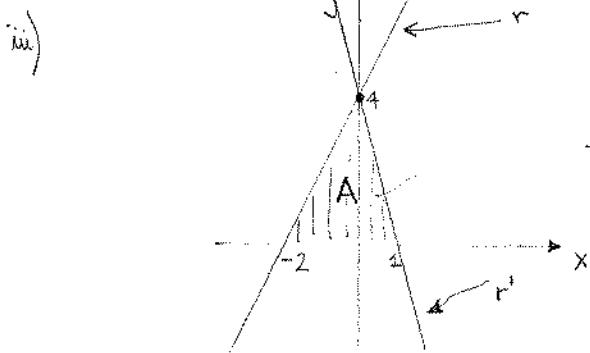
ii) r' = eq. retta tg al grafico di f nel pt. $(0, 4)$

$$y = f(0) + f'(0)(x-0)$$

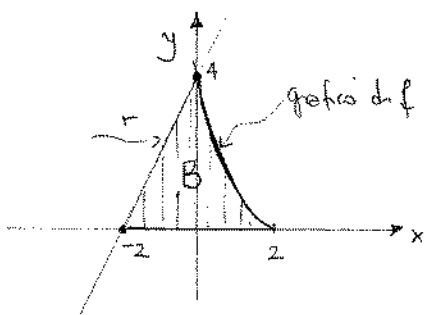
$$f'(x) = 2(x-2)$$

$$y = 4 - 4x$$

$$f'(0) = -4$$



$$\text{area di } A = \frac{[1 - (-2)] \cdot 4}{2} = \underline{6}$$

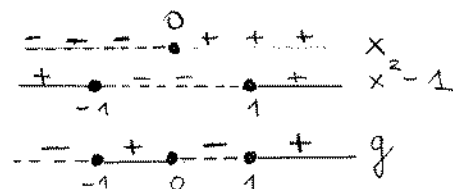


$$\begin{aligned} \text{area di } B &= \frac{4 \cdot 4}{2} + \int_0^2 f(x) dx = \\ &= 4 + \int_0^2 (x-2)^2 dx \\ &= 4 + \left. \frac{(x-2)^3}{3} \right|_0^2 = \\ &= 4 + \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{20}{3}}} \end{aligned}$$

3) $g(x) = x(x^2 - 1)$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

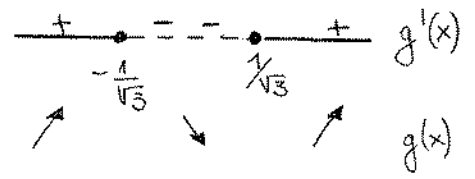
• segno di g



• monotonìa di g :

$$g(x) = x^3 - x$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1$$

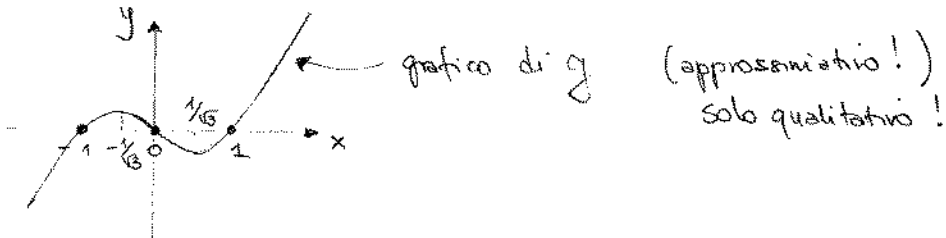


$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è pt. di max loc. forte di f

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è pt. di min. loc. forte di f

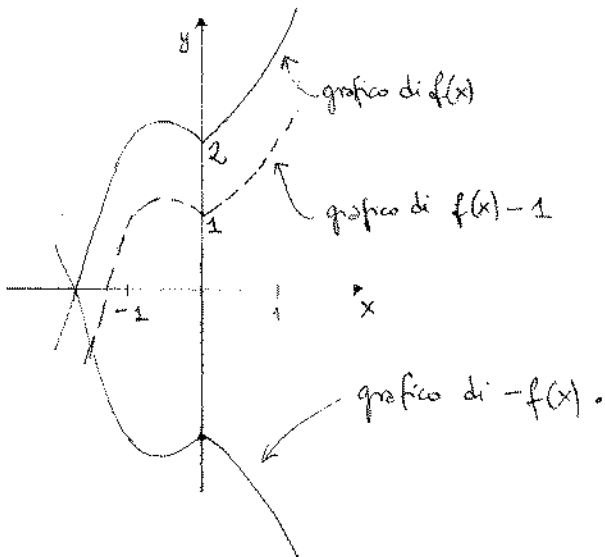
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$



$$ii) \int_{-1}^2 x(x^2-1) dx = \int_{-1}^2 (x^3-x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^2 = \left[\frac{16}{4} - \frac{4}{2} \right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = 2 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (g(x) + c) = c = 2 (= f(0)).$$

iv)



$$4) \text{ Nr. di frequentanti all'inizio del 1999} = X$$

$$\text{Nr. di frequentanti alla fine del 1999} = X + X \cdot \frac{20}{100} = Y$$

$$\text{" alla fine del 2000} = Y + Y \cdot \frac{35}{100} = Z$$

$$\text{" alla fine del 2001} = Z$$

$$\text{" alla fine del 2002} = Z - Z \cdot \frac{5}{100}$$

$$\text{Alla fine del 2002, il nr di freq. } \bar{e} \quad X \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{135}{100} \cdot \frac{95}{100} = X + X \cdot \frac{53,9}{100}$$

L'incremento complessivo in percentuale di frequentanti nel periodo 1999-2002 è

del 53,9% . ■

$$5) C_{30,5} \cdot C_{15,3} \cdot C_{20,2} = \frac{30!}{5! 25!} \cdot \frac{15!}{3! 12!} \cdot \frac{20!}{2! 18!}$$
■