

- 2) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \log(1+x^2)$ e $g(x) = x^2 e^x$.
- Dite qual è il minimo di f e di g ? (motivare la risposta). Le funzioni ammettono massimo?
 - Determinate la funzione composta $h(x) = (f \circ g)(x)$.
 - Calcolate la derivata prima della funzione h .
 - Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di h nel punto $(x_0, h(x_0)) = (0, 0)$.

Risposta:

-
- 3) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1-4x^2}{1+x^2}$.
- Studiate brevemente f (comportamento agli estremi del dominio, segno di f , monotonia, massimi e/o minimi locali,...) e tracciate il suo grafico.
 - La funzione f è iniettiva e/o suriettiva? f è una funzione limitata?
 - Disegnate le funzioni $|f(x)|$ e $-f(x)$.
 - Calcolate $\int_{-2}^1 (1+x^2)f(x) dx$.

Risposta:

- 4) In un paese l'inflazione è stata del 8% nel 2000, del 10% nel 2001, e del 5% nel 2002. Se alla fine del 2002 un cittadino di tale paese ha pagato 2 Euro per un pezzo di pane, quanto avrebbe pagato per il medesimo acquisto all'inizio del 2000?

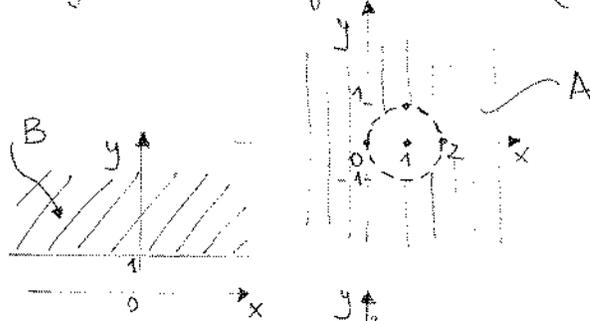
Risposta:

-
- 5) Un signore richiede all'Ufficio Anagrafe del suo Comune i seguenti certificati che vengono rilasciati singolarmente dagli addetti di tale ufficio: un certificato di nascita suo, tre certificati di nascita di suo figlio, due certificati di stato di famiglia e quattro certificati di residenza. In quanti modi diversi possono essere consegnati al signore tali certificati?

Risposta:

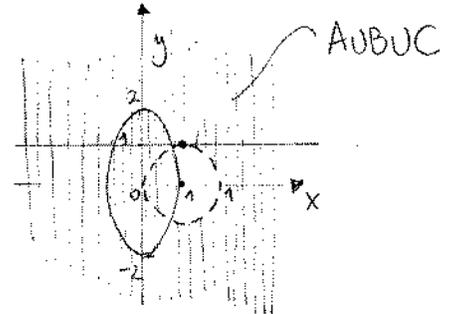
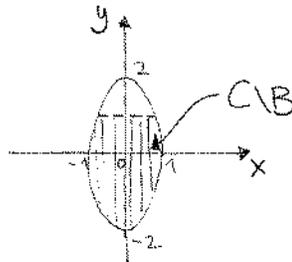
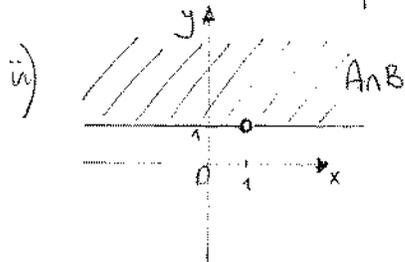
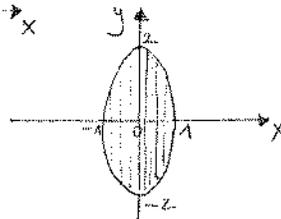
Università di Trento - Polo di Rovereto
 Facoltà di Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva Applicata
 Esame scritto di Analisi Matematica
 A.A. 2002-2003 - Trento, 16 Giugno 2003

1) i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x > 0\}$: $x^2 + y^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 > 1$



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$



2) i) $f(x) = \log(1+x^2)$

è una funzione pari! se $x \geq 0$ è crescente

(x^2 è crescente
 $1+x^2$ è crescente
 $\log(1+x^2)$ ")

$\log(1+x^2) \geq \log 1 = 0$

$\min_{\mathbb{R}} f = 0$

$g(x) = x^2 e^x$: mi ha $x^2 \geq 0$ e $e = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$e^x > 0$ quindi $x^2 e^x \geq 0$

$\min_{\mathbb{R}} g = 0$

Non esistono $\max_{\mathbb{R}} f$, $\max_{\mathbb{R}} g$: infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ii) $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \log(1 + x^4 e^{2x})$

iii) $h'(x) = \frac{1}{1+x^4 e^{2x}} \cdot (x^4 e^{2x})' = \frac{4x^3 e^{2x} + 2x^4 e^{2x}}{1+x^4 e^{2x}}$

iv) $y = h(0) + h'(0)x = 0$ è l'eq. della retta tangente al grafico di h nel pt. $(0, h(0)) = (0, 0)$. ■

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1-4x^2}{1+x^2}$. f è pari!

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$

segno di $f(x)$:

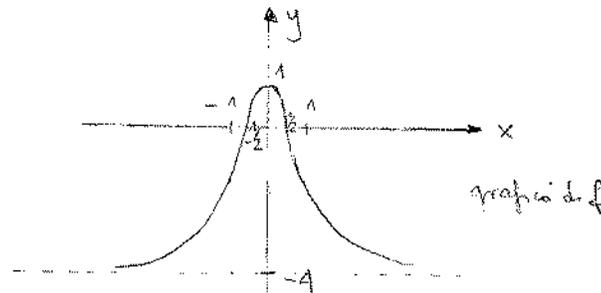
-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	+	+	-	-	-	-	-	-

derivata di $f(x)$:

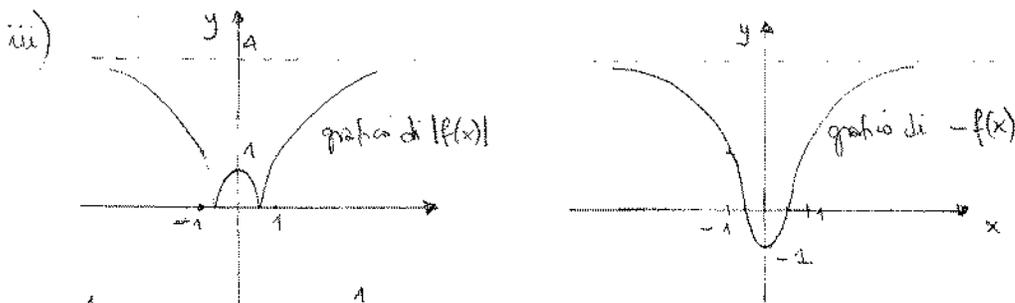
$$f'(x) = \frac{(1+x^2)(-8x) - (1-4x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-8x - 8x^3 - 2x + 8x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{-10x}{(1+x^2)^2}$$

$\begin{array}{c} + \quad \bullet \quad - \\ \quad \quad \quad 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ f'(x) \quad f(x) \end{array}$

$\Rightarrow x=0$ è pt. di massimo locale, e $f(0) = 1$



ii) f non è lineare (basta osservare che $f(-2) = f(2) = 0$)
 f non è suriettiva, poiché $f(\mathbb{R}) =]-4, 1] \subset \mathbb{R}$.
 f è una funzione limitata essendo $-4 < f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.



iv) $\int_{-2}^1 (1+x^2)f(x) dx = \int_{-2}^1 (1-4x^2) dx = \left[x - \frac{4x^3}{3} \right]_{-2}^1 = 1 - \frac{4}{3} - (-2) + \frac{4(-8)}{3}$

$$= 1 - \frac{4}{3} + 2 - \frac{32}{3} = \frac{9-36}{3} = -9$$

■

4) $x =$ costo del pezzo di pane all'inizio del 2000

$$y = x + x \cdot \frac{8}{100} \quad \text{costo del pane all'inizio del 2001}$$

$$z = y + y \cdot \frac{10}{100} \quad \text{costo " all'inizio del 2002,}$$

$$w = z + z \cdot \frac{5}{100} \quad \text{costo " alla fine del 2002.}$$

$$\text{Si ha } w = 2 \text{ €}, \text{ e quindi } 2 = z \frac{105}{100} = y \frac{110}{100} \frac{105}{100} = x \frac{108}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot \frac{105}{100}$$

$$\Rightarrow x \approx 1,60 \text{ €.} \quad \blacksquare$$

5) nr. di certificati richiesti = 10

nr. di modi diversi in cui possono essere consegnati al signore i certificati =

$$= \frac{10!}{3! 2! 4!} \quad \blacksquare$$