

Università degli Studi di Trento – Polo di Rovereto
Corso di Laurea in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva Applicata
Corso di Analisi Matematica - a.a. 2004/05
Docente: Anneliese Defranceschi (e-mail defrance@science.unitn.it)

LEZIONI CORSO

- 18/10/04 (2 ore): Esercizi vari su: rette, parabole; risoluzione di disequazioni e sistemi di disequazioni (in un'incognita).
Geometria analitica nel piano: distanza tra due punti. Perimetro di un triangolo. Equazione canonica della circonferenza con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano) e raggio r . Equazione generale.
- 19/10/04 (2 ore): Esercizi vari sull'equazione della circonferenza. Equazione canonica dell'ellisse con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano). Equazione canonica dell'iperbole con centro l'origine (o un altro punto del piano cartesiano). Equazioni generali dell'ellisse e dell'iperbole.
Esercizi vari.
- 20/10/04 (2 ore): Iperbole equilatera (riferita agli assi cartesiani). Esercizi.
Insiemi numerici limitati (limitati inferiormente, limitati superiormente). Esempi. Massimo e minimo di un insieme numerico.
Funzioni generiche: definizione di funzione (dominio, codominio, legge), esempi di funzioni e non (graficamente e non). Uguaglianza di due funzioni. Esempi.
- 25/10/04 (2 ore): Immagine di un insieme tramite una funzione. Immagine di una funzione. Esempi. Funzione reale. Funzione reale di variabile reale. Grafico. Grafico di una funzione reale di variabile reale. Ogni sottoinsieme di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ è grafico di una funzione?
Varianti di un grafico: dal grafico di f al grafico di $f(x)+h$, $f(x+h)$, $af(x)$, dove h ed a sono numeri reali fissati.
- 26/10/04 (2 ore): Grafico di $f(ax)$. Grafici della funzione costante, affine, quadratica. Esempi. Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Esempi. Funzione inversa f^{-1} . Grafico di f^{-1} . Rappresentazione di f^{-1} per una funzione f reale di variabile reale.
- 27/10/04 (2 ore): Funzione inversa di $f(x)=x^2$ (e di $f(x)=x^4$, $x^6 \dots$). Le funzioni radici pari e la loro rappresentazione grafica (non confondere la funzione inversa con la funzione reciproca $1/f(x)$!!!!). La funzione $f(x)=1/x^2$ ($1/x^4$, $1/x^6 \dots$) e il suo grafico.
Funzione inversa di $f(x)=x$ (e di $f(x)=x^3$, x^5 , \dots). Le funzioni radici dispari e la loro rappresentazione grafica (non confondere la funzione inversa con la funzione reciproca $1/f(x)$!!!!) La funzione $f(x)=1/x$ ($1/x^3$, $1/x^5 \dots$) e il suo grafico.
Funzione restrizione. Composizione di funzioni: definizioni ed esempi.
- 2/11/04 (2 ore): Insiemi di definizione di funzioni composte. Esempi. Funzione inversa e composizione.
Funzione reale di variabile reale: costruzione di nuove funzioni a partire dalle funzioni elementari mediante

- A) le 4 operazioni aritmetiche (somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni);
- B) la composizione di funzioni;
- C) le funzioni inverse;
- D) le funzioni definite a tratti.

Esempi.

Funzioni limitate (inferiormente limitate, superiormente limitate). Esempi.
 Estremi di una funzione: massimo e/o minimo. Punti di massimo e/o di minimo.
 Esempi.

3/11/04 (2 ore): Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzioni pari e funzioni dispari. Rappresentazione grafica di funzioni pari (dispari). Esempi: tutte le funzioni potenze pari sono funzioni pari, e tutte le funzioni potenze dispari sono funzioni dispari. Esempi.

Funzioni monotone (funzioni crescenti, decrescenti, debolmente crescenti, debolmente decrescenti). Esempi: $f(x)=x^2$ è crescente su $]0,+\infty[$; $f(x)=-x+1$ è decrescente su \mathbf{R} (dim.). Intervalli di monotonia. Esempi,

Funzione valore assoluto: def., rappresentazione grafica. Disequazioni con il valore assoluto. Esempi.

15/11/04 (2 ore): Funzione valore assoluto. Esercizi: rappresentazione grafica di funzioni con il valore assoluto; risoluzione di equazioni e disequazioni con il valore assoluto.

Funzione parte intera: definizione, rappresentazione grafica.

Potenze come funzioni: potenze ad esponente intero positivo, intero negativo (funzioni reciproche di x^m), frazionario (funzioni radici), ad esponente razionale: definizioni e proprietà di calcolo.

16/11/04 (2 ore): Esercizi di calcolo delle potenze.

Funzione esponenziale in base a ($a>0$, $a \neq 1$): proprietà, rappresentazione grafica. Risoluzione di equazioni e disequazioni esponenziali. Il numero di Nepero e .

Funzione logaritmo in base a ($a>0$, $a \neq 1$): definizione, proprietà, rappresentazione grafica.

17/11/04 (2 ore): Proprietà del logaritmo. Esercizi: calcolo di $\log_a x$ per diverse basi a e diversi punti x ; rappresentazione grafica di funzioni del tipo $\log|x|$, $3\log x$, $|\log x|$, $|\log|x||$; determinazione di insiemi di definizione per funzioni del tipo $1/\log(x-2)$, $1/(\log(x-2))^{1/2}$, $\log x^2$, $1/\log|x|$; $(e^{2x}-e^x)^{1/2}$.

Risoluzione di equazioni e disequazioni logaritmiche (utilizzando la monotonia e le proprietà algebriche del logaritmo; utilizzando il fatto che $\log_a x$ è la funzione inversa della funzione a^x).

22/11/04 (2 ore): Funzioni continue: funzione continua in $x_0 \in A$ (con ε e δ), funzione continua in A . Esempi: funzione costante e $f(x)=x$. Esempio di funzione non continua in un punto, Teorema della permanenza del segno.

Proposizione: se f e g sono funzioni continue in $x_0 \in A$, allora anche $f+g$ ($f-g$), fg , f/g (se $g(x_0) \neq 0$), $|f|$ sono continue in x_0 . Ulteriori esempi di funzioni continue.

Continuità della funzione composta e della funzione inversa.

Funzioni continue: funzioni polinomiali, funzioni razionali fratte (dove non si annulla il denominatore), funzioni radici, funzioni esponenziali, funzioni logaritmiche.

Funzioni continue su $[a,b]$: teorema di esistenza degli zeri; teorema dei valori intermedi.

23/11/04 (1 1/2 ore): Applicazione del teorema di esistenza degli zeri. Teorema di Weierstrass. Esempi.

Limiti di funzioni:

a) per descrivere il comportamento agli estremi del dominio di una funzione definita su $]a,b[$ (a numero reale oppure $-\infty$; b numero reale oppure $+\infty$): limite destro, limite sinistro;

b) per descrivere il comportamento vicino a c di una funzione definita su $]a,c[\cup]c,b[$: limite.

La retta reale estesa: $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

24/11/04 (2 ore): Ancora sui limiti; definizioni ed esempi. Definizione di funzione continua in un punto $x=c$ con il limite. Unicità del limite.

Proprietà algebriche del limite (limite destro, limite sinistro, limite).

Forme indeterminate: $\infty-\infty$, $0(\infty)$, ∞/∞ , $0/0$. Esempi.

Confronto di velocità di crescita tra $\log_a x$, x^n , a^x , se $a > 1$ e x tende a $+\infty$.

29/11/04 (2 ore): Ancora sulle forme indeterminate: $\infty-\infty$, $0(\infty)$, ∞/∞ , $0/0$. Esempi.

Esempi di funzioni continue e non (usando il limite). Esercizi: dedurre dal grafico il comportamento della funzione... Teorema del confronto (dei due carabinieri).

30/11/04 (2 ore): Limiti notevoli in 0 per le funzioni $[\log(1+x)]/x$ e $(e^x-1)/x$.

Limite della funzione composta. Esercizi.

Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

Introduzione alla derivata: rapporto incrementale, derivata in un punto.

Interpretazione geometrica della derivata. Equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ (se f è derivabile in x_0).

1/12/04 (2 ore): Funzione derivata. Derivata destra, derivata sinistra in un punto.

Derivate delle funzioni elementari. Esercizi: eq. retta tangente al grafico di varie funzioni.

Punti angolosi ($x=0$ per $f(x)=|x|$); cuspidi ($x=0$ per $f(x)=\text{radice di } |x|$); punti a tangente verticale ($x=0$ per $f(x)=\text{radice cubica di } x$).

Se f è derivabile in un punto, allora f è continua in quel punto. Non vale il viceversa ($f(x)=|x|$ è continua in $x=0$, ma non derivabile).

Algebra delle derivate. Esercizi.

6/12/04 (2 ore): Derivata della funzione composta. Esempi.

Massimi (minimi) locali (o relativi). Definizione ed esempi.

Teorema di Fermat. Punti critici (o stazionari). Teorema di Lagrange. Sua interpretazione geometrica e suoi corollari:

Corollario 1: $f' \equiv 0$ su $]a,b[$ implica che la funzione è costante su $]a,b[$;

Corollario 2: segno della derivata e monotonia della funzione (sia f derivabile su

$]a,b[$; f debolmente crescente (risp. debolmente decrescente) su $]a,b[$ se e solo se $f' \geq 0$ (risp. $0 \geq f'$) su $]a,b[$;
 se $f' > 0$ su $]a,b[$ allora f è crescente su $]a,b[$ (non vale il viceversa); se f' è negativa su $]a,b[$ allora f è decrescente su $]a,b[$.
 Esercizi: ricerca di massimi e/o minimi locali (e globali) di $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$, $f(x) = xe^{-x}$.

- 7/12/04 (2 ore): Ricerca di massimi e/o minimi locali (e globali) di $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $f(x) = \log(1+x^2)$.
 Derivate di ordine superiore. Esempi.
 Funzione convessa (concava) su $]a,b[$. Segno della derivata seconda e convessità (concavità).
 Schema per lo studio qualitativo di una funzione (dominio, simmetrie, comportamento agli estremi del dominio, segno della funzione; derivabilità e derivata, segno della derivata, punti critici, monotonia della funzione; derivata seconda, segno della derivata seconda e convessità (concavità); grafico approssimativo della funzione).
 Esempio: studio qualitativo di $f(x) = x/(x^2+1)$.
- 13/12/04 (2 ore): Studio qualitativo delle funzioni: $f(x) = 4/(x^2-4)$; $f(x) = (x-1)/x^3$; $f(x) = e^{-(x^2)}$; $f(x) = e^{-1/x^2}$; $f(x) = x^2 \log x$.
- 20/12/04 (2 ore): Altre primitive immediate: $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$, $\int f'(x)/f(x) dx = \log|f(x)| + c$; in generale $\int g'(f(x)) f'(x) dx = g(f(x)) + c$. Esercizi.
 Integrale generalizzato su $[a, +\infty[$: funzione integrabile su $[a, +\infty[$; integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente).
 Esempio: $f(x) = 1/x$ ha integrale (generalizzato) divergente positivamente su $[1, +\infty[$; $f(x) = 1/x^2$ ha integrale (generalizzato) convergente su $[1, +\infty[$; il caso generale $f(x) = 1/x^\alpha$, per $\alpha > 0$.
 L'integrale della funzione gaussiana e^{-x^2} su $]-\infty, +\infty[$ vale $\pi^{1/2}$.
- 21/12/04 (2 ore): Alcune osservazioni sul calcolo di aree di regioni piane delimitate da grafici di funzioni.
 Elementi di Calcolo Combinatorio: Permutazioni semplici e con ripetizioni. Disposizioni semplici. Combinazioni semplici. Coefficienti binomiali. Esercizi.