COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 8 NOVEMBRE 2004

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

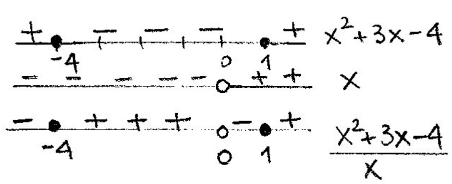
1) Siano A e B gli insiemi definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+2x-4}{x} < -1\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{(x-1)^2} > 1\}.$$

i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

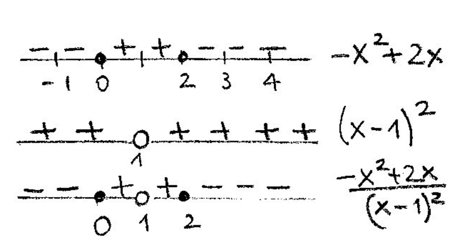
Risposta:

i) $\frac{x^2+2x-4}{x} < -1 \iff \frac{x^2+2x-4}{x} + 1 < 0 \iff \frac{x^2+3x-4}{x} < 0$

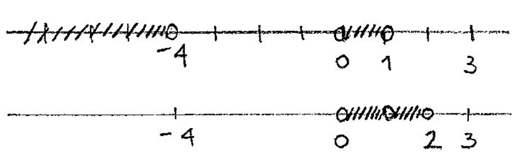


e quindi $A =]-\infty, -4[\cup]0,1[$; A non è limitato inferiormente.

$\frac{1}{(x-1)^2} > 1 \iff \frac{1-(x-1)^2}{(x-1)^2} > 0 \iff \frac{-x^2+2x}{(x-1)^2} > 0$



e quindi $B =]0,2[\setminus \{1\}$; B è un insieme limitato.



$A = ///$

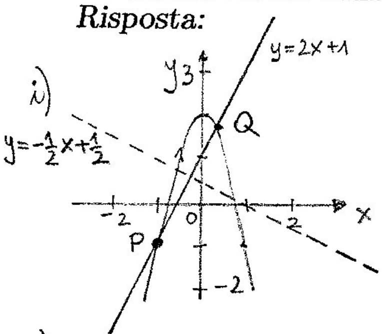
$B = ///$,

ii) $A \cup B =]-\infty,-4[\cup]0,1[\cup]1,2[$; $A \cap B =]0,1[$; $A \setminus B =]-\infty,-4[$.

2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy la retta di equazione $y = 2x + 1$ e la parabola di equazione $y = -3x^2 + 2$. Detti P e Q i punti di intersezione della retta con la parabola, calcolate la distanza tra P e Q.
ii) Determinate l'equazione della retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto $(1,0)$. Rappresentatela graficamente nel piano cartesiano xy.

Risposta:

i)



$$\begin{cases} 2x+1 = -3x^2+2 \\ y = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x-1=0 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \dfrac{-2\pm 4}{6} \left< \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \right. \\ y = 2x+1 \end{cases}$$

Allora $P = (-1,-1)$ $\quad Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

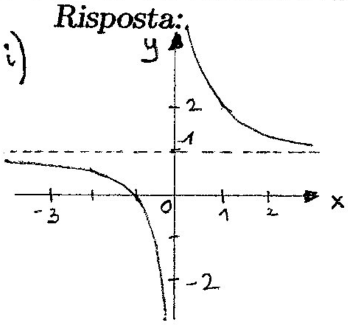
$$d(P,Q) = \sqrt{\left(-1-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-1-\tfrac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}} = \sqrt{\frac{80}{9}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\sqrt{5}}}\,.$$

ii) $y = -\frac{1}{2}x + q$: imponendo che $(1,0) \in$ retta, si ottiene $0 = -\frac{1}{2} + q$, ossia $q = \frac{1}{2}$. L'eq. della retta ricercata è $\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}}$.

3) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$.
i) Rappresentate graficamente la funzione f. Dite se $(1,3) \in \operatorname{graf} f$.
ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Risposta:

i)



$(1,3) \notin \operatorname{graf} f$, poiché $f(1) = 2$.

ii) se $k < 1$ o $k > 1$, $f(x) = k$ ha una soluzione;
se $k = 1$, l'eq. $f(x) = k$ non ha soluzioni.

4) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ le funzioni definite da

$$f(x) = 2x^3 + x, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2+1}, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Scrivete, se è possibile farlo, le funzioni $f+g$, fg e la composizione $h \circ f$, con i rispettivi domini.

Risposta:

$(f+g)(x) = 2x^3 + x + \dfrac{1}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(fg)(x) = \dfrac{2x^3+x}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt{2x^3+x} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x(2x^2+1) \geq 0 \qquad \operatorname{dom}(h\circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq$
$\hookrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq 0 \qquad = [0,+\infty[$.

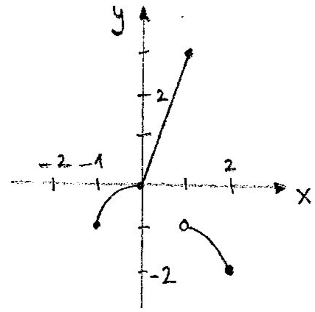
5) Sia $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione in figura.

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy le funzioni $x \mapsto -f(x)$, $x \mapsto f(2x)$ e $x \mapsto f(x) - 1$.

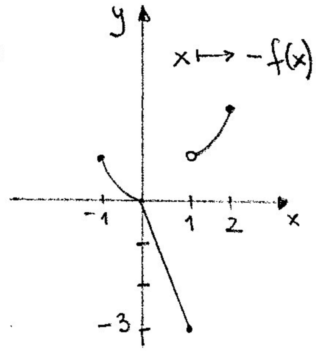
ii) f è una funzione iniettiva?

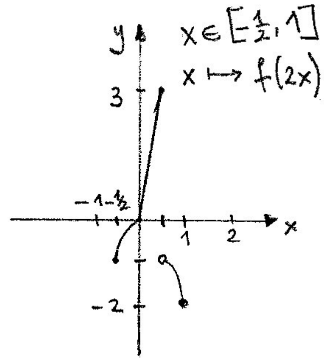
iii) Determinate $f([-1, 2])$.

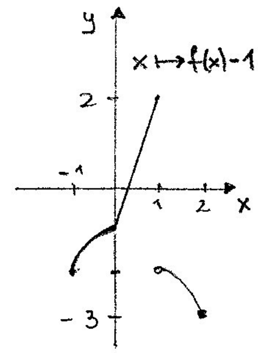
Risposta:



i)







ii) f è iniettiva : $\forall x_1 \neq x_2 \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

iii) $f([-1,2]) = \underline{\underline{[-2,3]}}$.

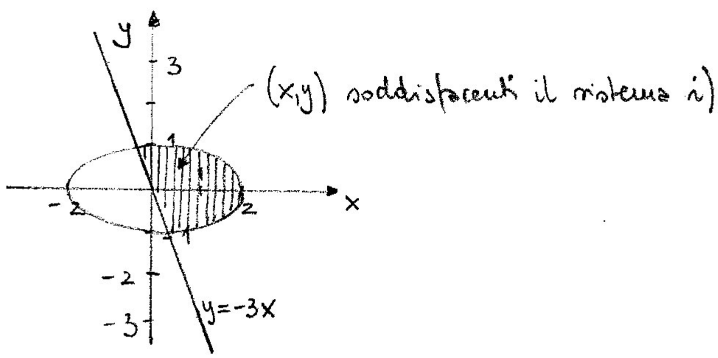
---

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano i seguenti sistemi:

i) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \\ y \ge -3x\,; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - \dfrac{3}{4} \ge 0 \\ y = -x^2\,. \end{cases}$

Risposta:

i)



ii) $\begin{cases} x^2+y^2-x-\frac{3}{4} \geq 0 \\ y=-x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geqslant 1 \\ y=-x^2 \end{cases}$