COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 8 NOVEMBRE 2004

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

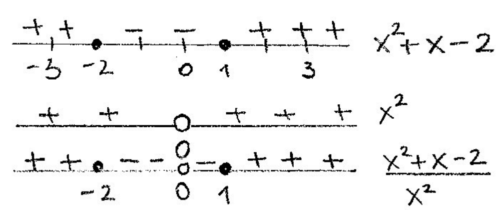
1) Siano A e B gli insiemi definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-2}{x^2} \geq 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{(x+1)^2} < 1\}.$$

i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$.

Risposta:

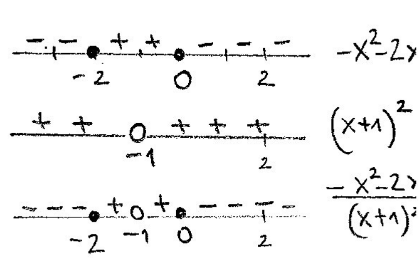
i) $\frac{x^2+x-2}{x^2} \geqslant 0 \iff x \leq -2$ o $x \geqslant 1$



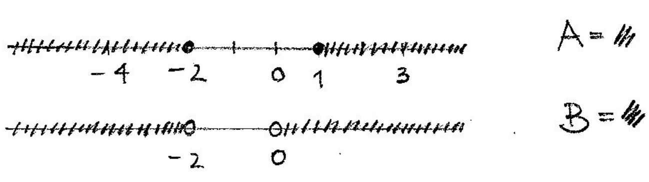
$A =]-\infty,-2] \cup [1,+\infty[$;

A non è un insieme limitato.

$\frac{1}{(x+1)^2} < 1 \iff \frac{1-(x+1)^2}{(x+1)^2} < 0 \iff \frac{-x^2-2x}{(x+1)^2} < 0$



$B =]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$; B non è un insieme limitato.

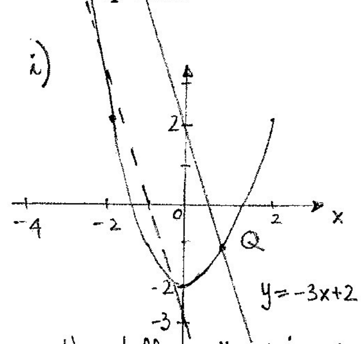


ii) $A \cup B =]-\infty,-2] \cup]0,+\infty[$; $A \cap B =]-\infty,-2[\cup [1,+\infty[$; $B \setminus A =]0,1[$.

2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy la retta di equazione $y = -3x + 2$ e la parabola di equazione $y = x^2 - 2$. Detti P e Q i punti di intersezione della retta con la parabola, calcolate la distanza tra P e Q.
ii) Determinate l'equazione della retta parallela alla retta data e passante per il punto $(-1, 0)$. Rappresentatela graficamente nel piano cartesiano xy.

Risposta:

i)



$$\begin{cases} -3x+2 = x^2-2 \\ y=-3x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ y=-3x+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=-4 \quad x_2=1 \\ y=-3x+2 \end{cases}$$

Allora $P=(-4,14)$ $\quad Q=(1,-1)$

$$d(P,Q)=\sqrt{(-4-1)^2+(14+1)^2}=\sqrt{25+225}=\sqrt{250}=\underline{\underline{5\sqrt{10}}}.$$

ii) $y=-3x+q$; imponendo che $(-1,0) \in$ retta, si ottiene $0=3+q$, ossia $q=-3$

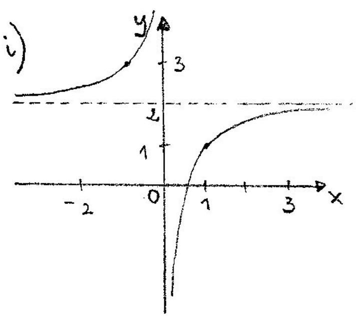
L'eq. della retta ricercata è $\underline{\underline{y=-3x-3.}}$

---

3) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.
i) Rappresentate graficamente la funzione f. Dite se $(1, 0) \in \operatorname{graf} f$.
ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Risposta:

i)



$(1,0) \notin \operatorname{graf} f$, poiché $f(1)=1$.

ii) se $k<2$ o $k>2$, $f(x)=k$ ha una soluzione ;

se $k=2$, l'eq. $f(x)=k$ non ha soluzioni .

---

4) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ le funzioni definite da

$$f(x) = -3x + x^4, \qquad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Scrivete, se è possibile farlo, le funzioni $f - g$, fg e la composizione $h \circ f$, con i rispettivi domini.

Risposta:

$(f-g)(x) = -3x+x^4-\dfrac{x}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(fg)(x) = (-3x+x^4)\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{-3x^2+x^5}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(h\circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt{-3x+x^4} \quad \forall x \in \mathbb{R} : x(-3+x^3) \geq 0$

$\hookrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq 0$

- - - - 0 + + + $\quad x$
- - - - - - - • + + + $\quad -3+$
+ + + 0 - $\sqrt[3]{3}$ + + + $\quad x(-3\ldots$

$\operatorname{dom}(h\circ f) = \left]-\infty, 0\right] \cup \left[\sqrt[3]{3}, +\infty\right[$.

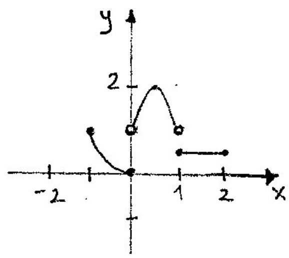
5) Sia $f : [-1,2] \to [0,2]$ la funzione in figura.

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy le funzioni $x \mapsto -\frac{1}{2}f(x)$, $x \mapsto f(-x)$ e $x \mapsto f(x)+1$.

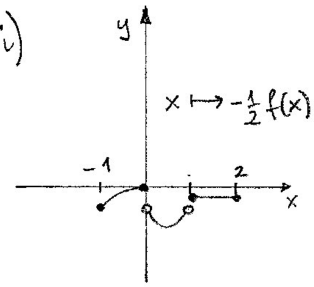
ii) f è una funzione suriettiva?

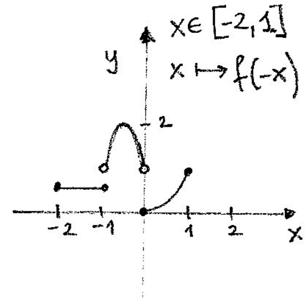
iii) Determinate $f([0,1])$.

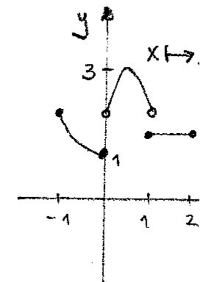
Risposta:



i)







ii) $f([-1,2]) = [0,2]$; f è suriettiva.

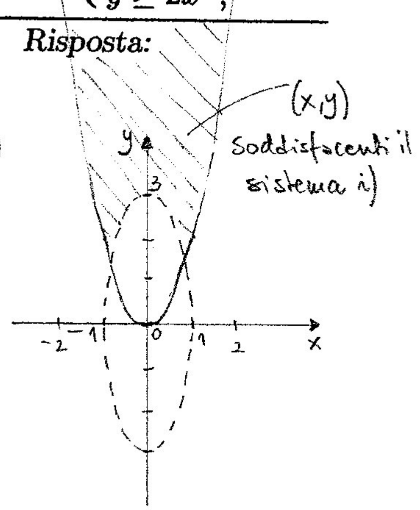
iii) $f([0,1]) = \underline{\underline{\{0, \tfrac{1}{2}\} \cup \,]1,2]}}$.

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano i seguenti sistemi:

i) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{9} > 1 \\ y \geq 2x^2 ; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 8 \\ x \geq -2 . \end{cases}$

Risposta:

i)



ii) $\begin{cases} x^2+y^2+2x \leq 8 \\ x \geq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+1)^2+y^2 \leq 9 \\ x \geq -2 \end{cases}$