COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA _______	C

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA APPLICATA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 8 NOVEMBRE 2004

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di **due ore**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

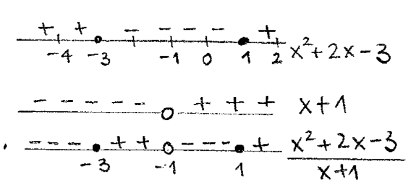
1) Siano A e B gli insiemi definiti da

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+3x-2}{x+1} \le 1\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{(x-2)^2} \le 1\}.$$

i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale. Dite se sono insiemi limitati.
ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$.

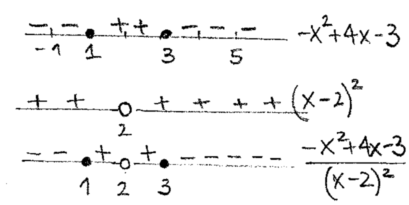
Risposta:

i) $\frac{x^2+3x-2}{x+1} \le 1 \iff \frac{x^2+3x-2}{x+1} - 1 \le 0 \iff \frac{x^2+2x-3}{x+1} \le 0$

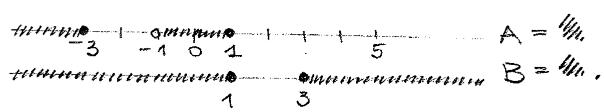


e quindi $A =]-\infty,-3] \cup]-1,1]$; A non è limitato inferiormente.

$\frac{1}{(x-2)^2} \le 1 \iff \frac{1-(x-2)^2}{(x-2)^2} \le 0 \iff \frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2} \le 0$



e quindi $B =]-\infty, 1] \cup [3,+\infty[$ B non è limitato.

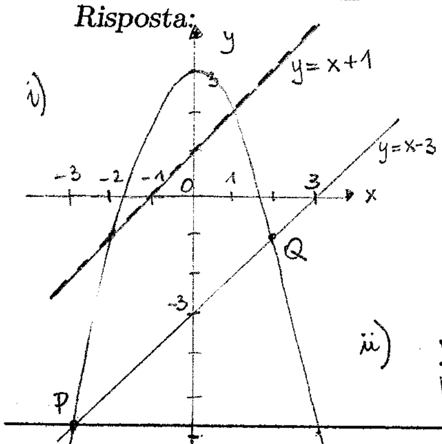


ii) $A \cup B = \underline{\underline{B}}$; $A \cap B = \underline{\underline{A}}$; $B \setminus A = \underline{\underline{]-3,-1] \cup [3,+\infty[}}$.

2) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy la retta di equazione $y = x - 3$ e la parabola di equazione $y = -x^2 + 3$. Detti P e Q i punti di intersezione della retta con la parabola, calcolate la distanza tra P e Q.
ii) Determinate l'equazione della retta parallela alla retta data e passante per il punto $(-1, 0)$. Rappresentatela graficamente nel piano cartesiano xy.

Risposta:

i)



$$\begin{cases} x-3 = -x^2+3 \\ y = x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+x-6=0 \\ y=x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{1/2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1\pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix} \\ y = x-3 \end{cases}$$

Allora $P=(-3,-6)$ $\quad Q=(2,-1)$

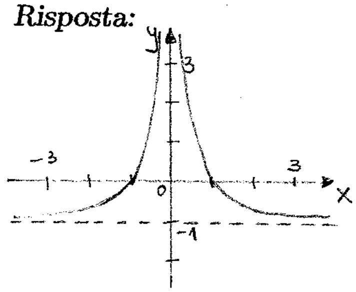
$$d(P,Q) = \sqrt{(-3-2)^2+(-6+1)^2} = \sqrt{25+25} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}.$$

ii) $y = x+q$: imponendo che $(-1,0) \in$ retta, si ottiene $0=-1+q$, ossia $q=1$.
L'eq. della retta ricercata è $\underline{\underline{y=x+1}}$.

3) Sia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \dfrac{1}{x^4} - 1$.
i) Rappresentate graficamente la funzione f. Dite se $(-1,0) \in \operatorname{graf} f$.
ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Risposta:

i)



$(-1,0) \in \operatorname{graf} f$ poiché $-1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f(-1)=0$.

ii) se $k \le -1$ l'eq. $f(x)=k$ non ha soluzioni;
se $k > -1$ l'eq. $f(x)=k$ ha due soluzioni.

4) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ le funzioni definite da

$$f(x) = x^2 + x, \qquad g(x) = 2x^4 + 1, \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Scrivete, se è possibile farlo, le funzioni fg, $\dfrac{g}{f}$ e la composizione $h \circ g$, con i rispettivi domini.

Risposta:

$$(fg)(x) = (x^2+x)(2x^4+1) = 2x^6 + 2x^5 + x^2 + x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2x^4+1}{x^2+x} \qquad \forall x\in\mathbb{R} : x(x+1) \neq 0 \qquad \operatorname{dom}\frac{g}{f} = \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$$

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2+x \neq 0$

$$(h\circ g)(x) = \sqrt{2x^4+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\hookrightarrow g(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

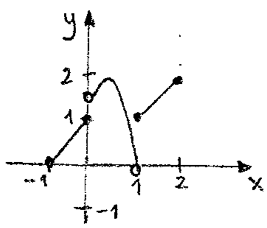
5) Sia $f : [-1,2] \to [0,2]$ la funzione in figura.

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy le funzioni $x \mapsto -2f(x)$, $x \mapsto f(x-1)$ e $x \mapsto f(x)+2$.

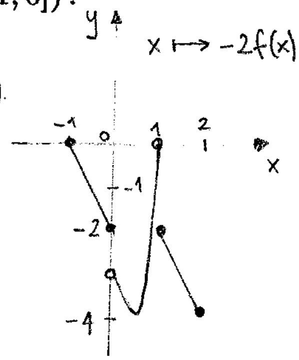
ii) f è una funzione iniettiva ?

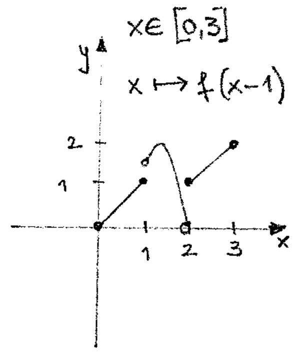
iii) Determinate $f([-1,0])$.

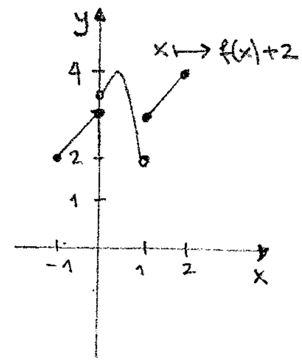
Risposta:



i)







ii) f non è iniettiva; basta prendere $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ e si ha $f(0) = f(1)$.

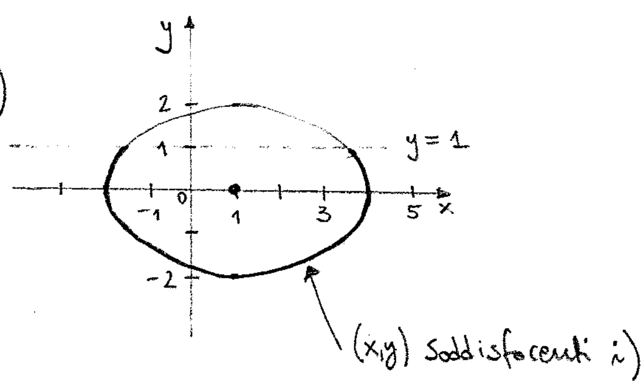
iii) $f([-1,0]) = \underline{\underline{[0,1]}}$.

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano i seguenti sistemi:

i) $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y \le 1; \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y > 3 \\ y \ge -x. \end{cases}$

Risposta:

i)



ii) $\begin{cases} x^2+y^2+2y > 3 \\ y \geqslant -x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + (y+1)^2 > 4 \\ y \geqslant -x \end{cases}$