Seconda Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA (2/12/04)

FILA A 1) i) $x(x-1)+2|x|\le 2 \iff \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x+2x\le 2\end{cases}$ opp. $\begin{cases} x<0 \\ x^2-x-2x\le 2\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-2\le 0\end{cases}$ opp. $\begin{cases} x<0 \\ x^2-3x-2\le 0\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\ge 0 \\ -2\le x\le 1\end{cases}$ opp. $\begin{cases} x<0 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{17}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow x\in \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right]$.

ii) $\dfrac{e^x(3x-x^2)}{\log x}\le 0 \iff \dfrac{3x-x^2}{\log x}\le 0$ essendo $e^x>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

$- - - \underset{0}{\bullet} + + \underset{3}{\bullet} - - - -$ $\quad 3x-x^2=x(3-x)$

$\underset{0}{\circ} - \underset{1}{\circ} + + + + + + +$ $\quad \log x$

$\underset{0}{\circ} - - \underset{1}{\circ} + \underset{3}{\bullet} - - - - - - -$ $\quad \dfrac{3x-x^2}{\log x}$

$x\in]0,1[\ \cup\ [3,+\infty[$.

$\square$

2) i) $\log_2(x^2+2)\le 0$ **Mai!** perché $x^2+2>1 \ \forall x\in\mathbb{R}$ e quindi $\log_2(x^2+2)>0$!

$\log(x+1)+\log x\le \log 2 \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x>0 \\ (x+1)x\le 2\end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x^2+x-2\le 0\end{cases} \iff 0<x\le 1$.

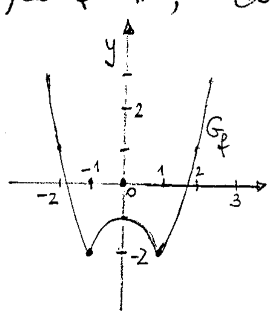
ii) $2^{3x+4}\le 1 \iff 3x+4\le 0 \iff x\le -\frac{4}{3}$.

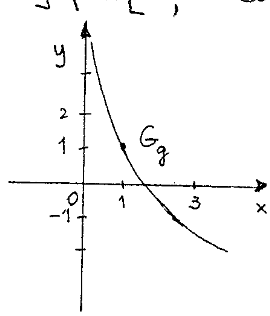
$e^{x^2-3}e^{2x}>e^{-1} \iff e^{x^2-3+2x}>e^{-1} \underset{e^x \text{ è crescente}}{\iff} x^2-3+2x>-1$

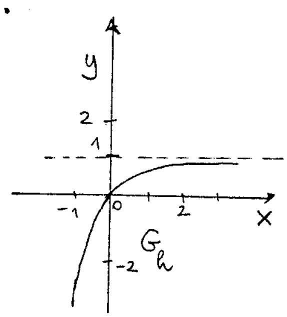
$\iff x^2+2x-2>0 \iff x\in]-\infty,-1-\sqrt{3}[\ \cup\ ]-1+\sqrt{3},+\infty[$.

$\square$

3) i) $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$; $\quad \operatorname{dom} g=]0,+\infty[$; $\quad \operatorname{dom} h=\mathbb{R}$.







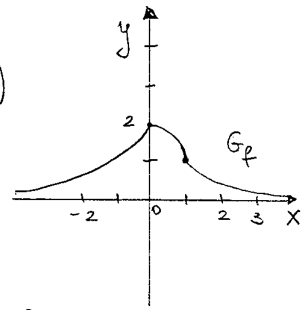
ii) Sono funzioni continue, essendo prodotto, somma di funzioni continue, e composizione di funzioni continue.

iii) $\min\limits_{[0,4]} f = \underline{\underline{-2}}$ $\quad \max\limits_{[0,4]} f = f(4) = \underline{\underline{13}}$ $\quad \bar{x} = 1$ pt. di minimo, $\hat{x} = 4$ pt. di massimo

$\min\limits_{[0,4]} g = g(4) = \underline{\underline{1 - 2\log 4}}$ $\quad \nexists \max\limits_{[0,4]} g$ $\quad \bar{x} = 4$ pt. di minimo

$\nexists \min\limits_{[0,4]} h$ $\quad \max\limits_{[0,4]} h = h(4) = 1 - \frac{1}{2^4}$ $\quad \hat{x} = 4$ pt. di massimo. □

4) i)



ii) f è continua per $x<0$, continua in $0<x<1$, e continua per $x>1$. Inoltre $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$. Quindi f è continua in $x=0$, e in $x=1$; f è continua in $\mathbb{R}$.

iii) f è crescente su $]-\infty,0]$; f è decrescente su $[0,+\infty[$. □

5) i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$; f non è continua in $x=1$ ($x=1$ è un pt. interno di $[-1,2]$ e $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$).

ii) $x = \frac{3}{2}$ è un asintoto verticale per f.

iii) $f([-1,2]) =]-\infty,2] \cup \{3\}$.

iv) $f'<0$ su $]-1,1[$, $f'>0$ su $]\frac{3}{2},2[$, $f'=0$ su $]1,\frac{3}{2}[$. □

6) i) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \underline{\underline{+\infty}}$; $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-x} - \frac{x^3}{2^{x-1}}\right) = \underline{\underline{0}}$; $\quad \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{\log(|x|+1)} = \underline{\underline{-\infty}}$.

$x^2 \to 4$, $x-2$: infinitesimo positivo; $e^{-x} \to 0$, $\frac{x^3}{2^{x-1}} \to 0$; $x^2-1 \to -1$, $\log(|x|+1)$: infinitesimo positivo

ii) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{3x-2x^m} = \begin{cases} +\infty & m=1 \\ -\frac{1}{2} & m=2 \\ 0 & m>2. \end{cases}$$ □

FILA (B) 1) i) $3+x^2-3|x|>1 \iff \begin{cases} x\geq 0 \\ 3+x^2-3x>1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x<0 \\ 3+x^2+3x>1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x<0 \\ x^2+3x+2>0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\geq 0 \\ x<1 \text{ o } x>2 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x<0 \\ x<-2 \text{ o } x>-1 \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x\in\,]-\infty,-2[\, \cup\,]-1,1[\, \cup\,]2,+\infty[}}\,.$

ii) $\dfrac{2^x(4x-x^2)}{\sqrt[3]{x}}\geq 0 \iff \dfrac{4x-x^2}{\sqrt[3]{x}}\geq 0$ essendo $2^x>0 \;\forall x\in\mathbb{R}$

$- - - \bullet_0 + + + + \bullet_4 - - -$ $\quad 4x-x^2=x(4-x)$

$- - - - \circ_0 + + + + + + +$ $\quad \sqrt[3]{x}$

$+ + + + \circ_0 + + + + \bullet_4 - - - -$ $\quad \dfrac{4x-x^2}{\sqrt[3]{x}}$

$\underline{\underline{x\in\,]-\infty,4]\setminus\{0\}}}\,.$

$\square$

2) i) $\log(x^2+3)>0 \iff x^2+3>1 \iff x^2+2>0$ sempre! $\underline{\underline{\mathbb{R}}}\,.$

$\log_2(x+3)+\log_2 x\geq \log_2 4 \iff \begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \\ (x+3)x\geq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ x^2+3x-4\geq 0 \end{cases}$

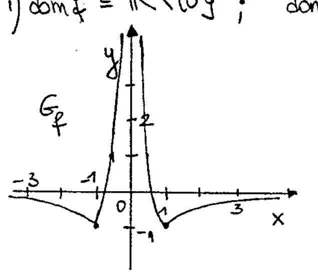
$\Rightarrow \underline{\underline{x\in [1,+\infty[}}\,.$

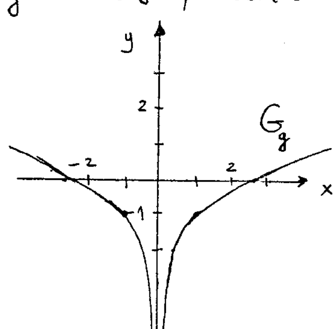
ii) $e^{3x+1}>1 \iff 3x+1>0 \iff \underline{\underline{x>-1/3}}\,.$

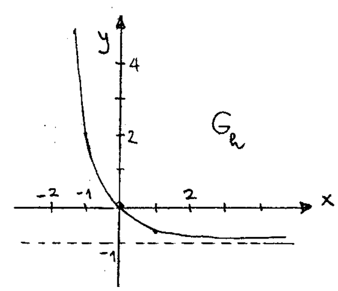
$2^{x^2-2}\,2^{4x}\leq \frac{1}{2} \iff 2^{x^2-2+4x}\leq 2^{-1} \underset{2^x \text{ è crescente}}{\iff} x^2+4x-2\leq -1 \iff$

$x^2+4x-1\leq 0 \iff \underline{\underline{x\in[-2-\sqrt{5},\,-2+\sqrt{5}]}}\,.$

3) i) $\mathrm{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\mathrm{dom} g=\mathbb{R}\setminus\{0\}$; $\mathrm{dom} h=\mathbb{R}$.







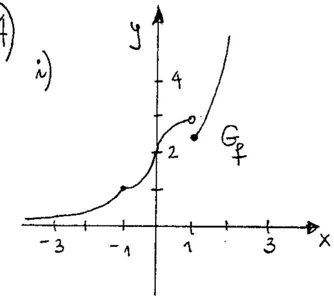
ii) sono funzioni continue, essendo prodotto, rapporto, somma, composizione di funzioni continue.

iii) $\min\limits_{]0,3]} f=f(1)=-1$ $\quad \nexists \max\limits_{]0,3]} f$ $\quad \bar{x}=1$ è pt. di minimo.

$\nexists \min\limits_{]0,3]} g \qquad \max\limits_{]0,3]} g = g(3) = -1+\log 3 \qquad \hat{x} = 3$ è pt. di massimo.

$\nexists \max\limits_{]0,3]} h \qquad \min\limits_{]0,3]} h = h(3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 1 \qquad \hat{x} = 3$ è pt. di minimo. □

4) i)



ii) f è continua per $x<-1$, continua in $]-1,1[$ e continua per $x>1$.

Inoltre $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$ e quindi f è continua in $x=-1$, mentre

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = e$, e quindi f non è continua in $x=1$.

iii) f è crescente su $]-\infty,1[$; f è crescente su $[1,+\infty[$. □

5) i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 3$. f non è continua in $x=0$

($x=0$ è un pt. interno ad $[-2,1]$ e $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$).

ii) $x=1$ è un asintoto verticale per f.

iii) $f([-2,1]) = \{-1\} \cup [1,2] \cup [3,+\infty[$.

iv) $f'>0$ su $]-2,-1[$, su $]0,1[$, $f'=0$ su $]-1,0[$. □

6) i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^{x-1} \to 1}{x-1} = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\underset{\downarrow\, 0}{2^{-x}} - \underset{\downarrow\, 0}{\dfrac{\log(x^4+3)}{x-1}} \right) = \underline{\underline{0}}$;

"infinitesimo positivo

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+e) \to 1}{\log(|x|+1)} = \underline{\underline{+\infty}}$.

→ infinitesimo positivo

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+x^m}{x^2+x} = \begin{cases} 0 & m=1 \\ 1 & m=2 \\ +\infty & m>2. \end{cases}$

□