

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

--	--	--	--	--	--

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 12 GENNAIO 2005

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **due ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

1) Calcolate $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3} dx$; $\int_3^4 \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} dx$; $\int_{-1}^1 (|\sqrt[3]{x}| + \sqrt[3]{x}) dx$.

- 2) i) Studiate brevemente la funzione $f(x) = (x^2 - 1)^2$ e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano xy .
ii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico della funzione $g(x) = -3x^2 + 3$.

- 3) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{x - 2}$$

e tracciate un grafico approssimativo nel piano cartesiano xy .

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, -\frac{1}{2})$.

iii) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto |f(x)|$ e $x \mapsto -f(x)$.

iv) Calcolate $\int_0^1 e^{-x} f(x) dx$.

4) Provate che l'equazione

$$e^x + \sqrt[3]{x} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo $[-1, 1]$.

5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Quali delle seguenti affermazioni

sono vere? (motivate le risposte)

i) f ha massimo e minimo su $[0, +\infty[$;

ii) f è decrescente su \mathbb{R} ;

iii) $\int_{-1}^3 f(x) dx \geq 0$; $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$;

iv) $f(x) \leq e^{-x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esplicitate la seguente sommatoria $\sum_{k=0}^4 f(k)$.

6) Dite in quanti modi si possono disporre in fila 10 palline, 7 blu e 3 rosse, con la condizione che al primo posto ci sia una pallina blu e all'ultimo posto ci sia una pallina rossa.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 12 GENNAIO 2005

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di **due ore**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

1) Calcolate $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} dx$; $\int_0^1 x e^{x^2+1} dx$; $\int_{-1}^1 (|\sqrt[5]{x}| - \sqrt[5]{x}) dx$.

- 2) i) Studiate brevemente la funzione $f(x) = (x^2 - 2)^2$ e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano xy .
ii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico della funzione $g(x) = -3x^2 + 6$.

- 3) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

e tracciate un grafico approssimativo nel piano cartesiano xy .

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, 1)$.

iii) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto -f(x)$ e $x \mapsto |f(x)|$.

iv) Calcolate $\int_2^3 \frac{f(x)}{e^x} dx$.

4) Provate che l'equazione

$$\log x - |x - e| = \frac{1}{x}$$

ha almeno una soluzione nell'intervallo $[1, e]$.

5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (motivate le risposte)

i) f ha massimo e minimo su $[0, 3[$;

ii) f è decrescente su \mathbb{R} ;

iii) $\int_{-1}^3 f(x) dx \geq 0$; $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$;

iv) $f(x) \leq \frac{1}{x^4}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esplicitate la seguente sommatoria $\sum_{k=0}^3 f(k)$.

6) Dite in quanti modi si possono disporre in fila 12 palline, 7 blu e 5 rosse, con la condizione che sia al primo posto che all'ultimo posto vanno palline con lo stesso colore.
