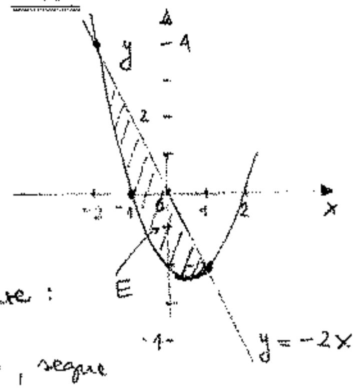
Esame scritto di ANALISI MATEMATICA – Rovereto, 10 febbraio 2005

FILA (A) 1) $(A \cup C) \cap B$. $\square$

2) i) $d(P,Q) = \sqrt{(-2-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = \underline{3\sqrt{5}}$.

ii) $\frac{y-4}{x+2} = \frac{-2-4}{1+2} \iff y = 4 - 2(x+2)$

$\iff \underline{y = -2x}$



iii) $y = ax^2 + bx + c$ è l'eq. con a, b, c da determinare: imponendo che $(0,-2)$ appartenga alla parabola, segue subito che $c = -2$; inoltre si deve avere

$$\begin{cases} 4 = 4a - 2b - 2 \\ -2 = a + b - 2 \end{cases}$$

Ne segue $\begin{cases} 3 = 2a - b \\ 0 = a + b \end{cases}$ da cui $b = -1$, $a = 1$. L'eq. della parabola ricercata è $\underline{y = x^2 - x - 2}$.

iv) $$\text{area } E = \int_{-2}^{1} \left(-2x - (x^2 - x - 2)\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 - x + 2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \underline{\frac{9}{2}}.$$ $\square$

3) $f(x) = \frac{x}{\log x}$ i) • $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, \ x \neq 1\} = \underline{]0,1[\cup]1,+\infty[}$.

• segno di f:

− − − − 0 + + + + +	x
NON DEF. 0 − 0 + + + + (0, 1)	$\log x$
NON DEF. 0 − 0 + + + + + + (0, 1)	$f(x)$

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• $\text{dom} f' = \text{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\log x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\log x)^2} = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

...

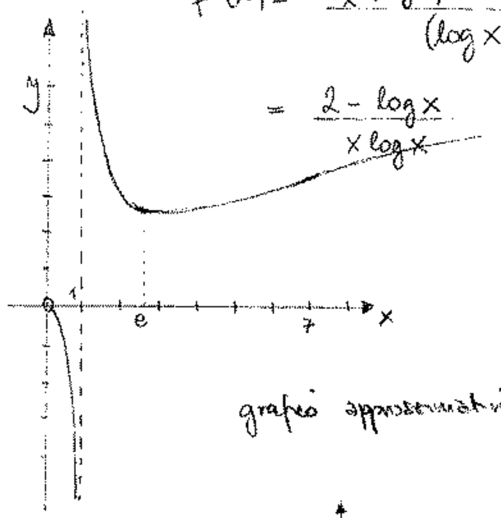
0	$- - - -$	e	$+ + + +$ $\log x - 1$
0	$+$	0	$+ + + + +$ $(\log x)^2$
0	$-$ 1 $-$	e	$+ + + +$ $f'(x)$
	$\searrow$ $\searrow$		$\nearrow$ $f(x)$

$x = e$ è pt. di min. loc. forte e $f(e) = e$.

- $\mathrm{dom}\, f'' = \mathrm{dom}\, f$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}(\log x)^{\cancel{2}} - (\log x - 1)\, 2\cancel{(\log x)}\, \frac{1}{x}}{(\log x)^{\cancel{2}}} = \frac{\log x - 2\log x + 2}{x \log x}$$

$$= \frac{2 - \log x}{x \log x}$$

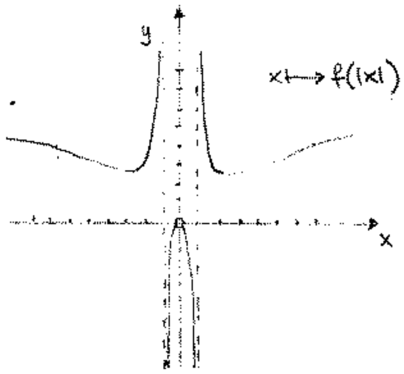


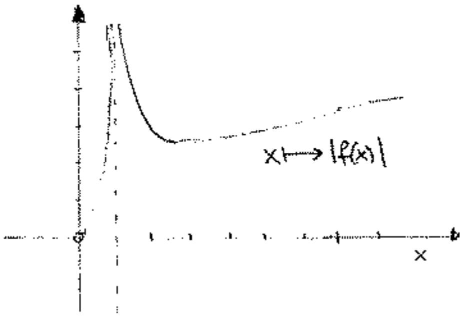
0	$+ + + +$	e^2	$- - - - -$	$2 - \log x$
0 $-$ 1	$+ + + + + + +$		$+$	$\log x$
0 $-$ 1	$+ + + + +$	e^2	$- - - -$	$f''(x)$
$\cap$	$\cup$		$\cap$	$f(x)$

grafico approssimativo di f.

ii) $\underline{\underline{]1, e^2]}}$.

iii)





iv) f non è una funzione limitata (né inferiormente limitata, né superiormente limitata). $\square$

4) $f(x) = |x| - |x-1|$ Ricordiamo che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$,

e quindi
$$f(x) = \begin{cases} x - (x-1) & \text{se } x \geq 1 \\ x - (-x+1) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x - (-x+1) & \text{se } x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

i)

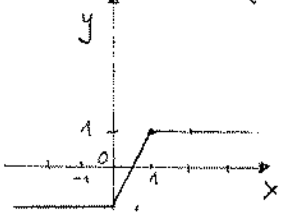


grafico di f

ii) f è debolmente crescente su $\mathbb{R}$.
$(\forall x_1, x_2,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.

iii) f non è derivabile in $x = 0$, in $x = 1$.

Infatti $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$ $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 2$;

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$ $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$.

$\min_{[-1,1]} f = -1$ pt. di minimo $x \in [-1,0]$ $\max_{[-1,1]} f = 1$ pt. di max $x = 1$.

$\square$

5) i) a) infatti $F'(x) = 2(\log x)\frac{1}{x} = \frac{2\log x}{x} = f(x)$ in $]0,+\infty[$.

ii) b) infatti $\frac{x^2-1}{x^2+3} > 0 \iff x^2-1>0 \iff x^2>1 \iff x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

iii) c) infatti $F(1) = \int_0^1 (e^{t^2}+t)\,dt$. Poiché $e^{t^2}+t \geq 1$ in $[0,1]$ si ha

$F(1) = \int_0^1 (e^{t^2}+t)\,dt \geq \int_0^1 1\,dt = 1$.

iv) b) infatti $2^3 2^x - \frac{1}{2} \geq 0 \iff 2^{3+x} \geq 2^{-1} \iff 3+x \geq -1 \iff x \geq -4$.

v) b) (basta studiare il segno della funzione! oppure osservare che x^5 è molto più piccolo di x^2 per x vicino a 0.

$\square$

6) i) $6 \cdot P_5 = 6 \cdot 5! = \underline{\underline{6!}}$

ii) $\underline{\underline{2 \cdot 6!}}$

$\square$