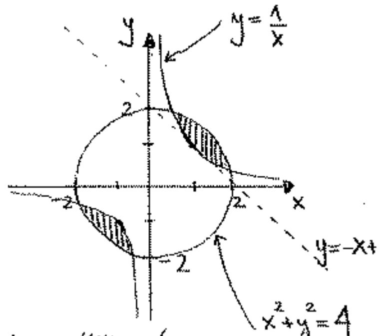
Esame scritto di ANALISI MATEMATICA – Rovereto, 9 giugno 2005

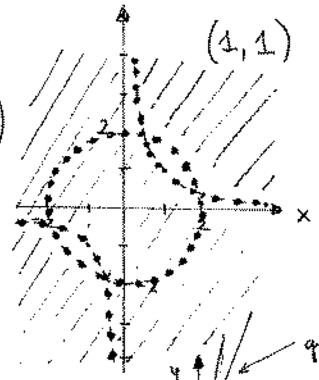


1) i) $\begin{cases} xy \geq 1 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x>0 \\ y \geq \frac{1}{x} \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ y \leq \frac{1}{x} \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$

A = //// (zona tratteggiata)

ii) Esempio : $k=2$: infatti, la retta $y=-x+2$ passa per il punto $(1,1)$ che soddisfa $xy=1$ e $x^2+y^2<4$.

iii)



$\mathbb{R}^2 \setminus A$ = //// (zona tratteggiata).

$(\frac{1}{4}, 4) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$? sì, poichè $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ ma $(\frac{1}{4})^2 + 4^2 > 1$.

2) i)

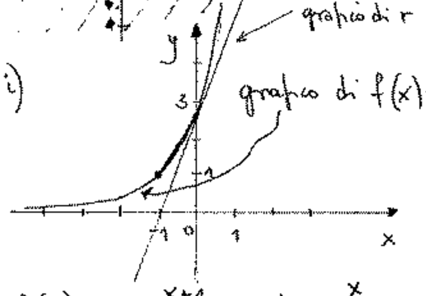


grafico di $f(x)=e^{x+1}$. f è suriettiva, poichè $f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$. ($\forall y>0\ \exists x \in \mathbb{R} : f(x)=y$; infatti, fissato $y>0$ si ha $x=-1+\log y$). Infine

$\frac{f(x)}{e} = \frac{e^{x+1}}{e} = \frac{\cancel{e} \cdot e^x}{\cancel{e}} = e^x$.

ii) $f(x) < 1 \iff e^{x+1} < 1 \iff e^{x+1} < e^0 \underset{e^x \text{ strett. crescente}}{\iff} x+1<0$

$\iff \underline{\underline{x<-1}}$.

iii) $f'(x) = e^{x+1}$ e $f'(0) = e$. Allora la retta tangente r ha l'eq. $\underline{y} = f(0) + f'(0)(x-0) = \underline{e+ex}$.

La pendenza ha segno positivo.

iv) Sia A la regione piana delimitata dal grafico di f, dalla retta r e dalle rette $x=0$ e $x=1$. Allora $\underline{\text{area}\, A} = \int_0^1 \left(e^{x+1} - e - ex\right) dx =$

$\left[e^{x+1} - ex - e\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e^2 - e - \frac{e}{2} - e = \underline{\underline{e^2 - \frac{5}{2}e}}$.

3) i) $f(n) < f(n+1) \iff \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} \iff n(n+2) < (n+1)^2$

$\iff \cancel{n^2} + \cancel{2n} < \cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 \iff 0<1$ e questo è vero sempre!

ii) $\sum_{n=1}^{4} f(n) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5} = \frac{3+4}{6}+\frac{15+16}{20}$

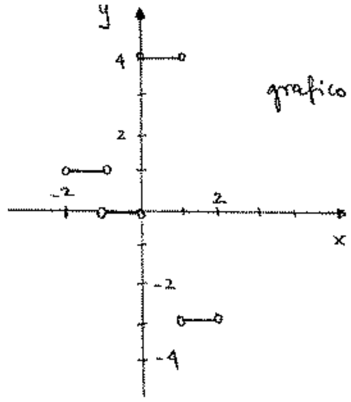
$= \frac{7}{6}+\frac{31}{20} = \frac{70+93}{60} = \underline{\underline{\frac{163}{60}}}.$

iii) $\sum_{n=1}^{4} \log(f(n)) = \log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(\frac{4}{5}\right) = (\overset{=0}{\cancel{\log 1}}-\cancel{\log 2})+(\cancel{\log 2}-\cancel{\log 3})+$
$+(\cancel{\log 3}-\cancel{\log 4})+(\cancel{\log 4}-\log 5) = -\log 5 = \underline{\underline{\log\frac{1}{5}}}.$

4) i) f è monotona crescente su $[-2,1]$, è monotona decrescente su $[1,2]$.

$f([-1,1]) = [-1,3]$.

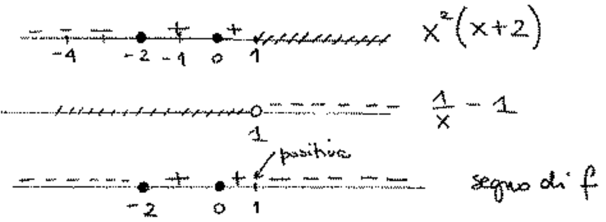
ii) $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{su }]-2,-1[\\ 0 & \text{su }]-1,0[\\ 4 & \text{su }]0,1[\\ -3 & \text{su }]1,2[\end{cases}$



iii) $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\frac{3}{2}-1 = \underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$

iv) $A = \{x\in[-2,2] : f(x)>0\} = \underline{\underline{]\frac{1}{4},2[}}.$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2(x+2) & \text{se } x\le 1 \\ \frac{1}{x}-1 & \text{se } x>1. \end{cases}$



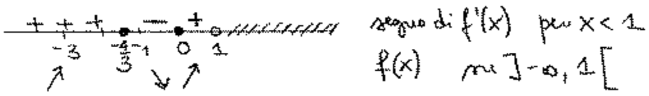
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f(1)=3 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1.$

<u>NOTA</u>: $f(1)=3 \ne \lim_{x\to 1^+} f(x)$; quindi f non è continua in $x=1$.

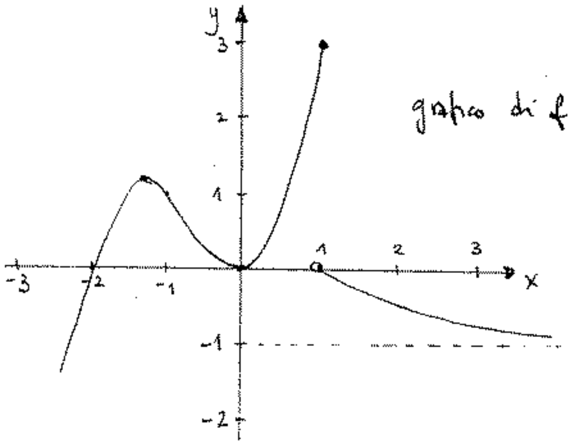
<u>Derivabilità</u>: se $x<1$ f è derivabile e $f'(x) = 3x^2+4x = x(3x+4)$.



$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}\left(-\frac{4}{3}+2\right) = \frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{27} > 1$

$f(0)=0$

se $x > 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} - 1$



ii) $x = 1$ pt. di massimo di f su $\mathbb{R}$ $\qquad M = f(1) = 3$ è il massimo di f su $\mathbb{R}$.

$\nexists$ minimo di f su $\mathbb{R}$.

iii) $[-1,3]$ è un intervallo chiuso e limitato, ma f non è continua su questo intervallo; quindi f non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.

$$\min_{[-1,3]} f = f(3) = \frac{1}{3} - 1 = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}} \quad ; \quad \max_{[-1,3]} f = f(1) = \underline{\underline{3}}.$$

6) $$5 \cdot D_{5,3} = 5 \cdot \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = \underline{\underline{300}}.$$