COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI	A
NOME ______________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA $\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup\sqcup$		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — POLO DI ROVERETO

FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2004-2005 — ROVERETO, 9 GIUGNO 2005

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di **due ore e mezza**. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare oltre al materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura solo i vostri appunti. Non usate il colore rosso.

1) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano xy l'insieme A dei punti (x, y) che soddisfano il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} xy \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \,. \end{cases}$$

ii) Determinate un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che la retta $y = -x + k$ interseca l'insieme A in almeno un punto.

iii) Rappresentate graficamente l'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Il punto $(\frac{1}{4}, 4) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$?

2) Sia $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ la funzione definita da $f(x) = e^{x+1}$.
i) Rappresentate graficamente f. f è suriettiva? Vale $\dfrac{f(x)}{e} = e^x$?
ii) Risolvete in $\mathbb{R}$ la disequazione $f(x) < 1$.
iii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, f(0))$ e rappresentatela graficamente. Qual è il segno della pendenza di r ?
iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dalla retta r e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

3) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(n) = \dfrac{n}{n+1}$.
i) Verificate che $f(n) < f(n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
ii) Scrivete esplicitamente $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} f(n)$ e calcolate l'espressione.
iii) Verificate che $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \log(f(n)) = \log\frac{1}{5}$.

4) Sia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.
i) Determinate gli intervalli di monotonia della funzione f, e determinate $f([-1, 1])$ (= immagine di $[-1, 1]$ tramite f).
ii) Determinate, dove esiste, la funzione derivata $f'(x)$ e rappresentatela graficamente.
iii) Determinate $\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$.
iv) Determinate il più grande sottoinsieme A di $[-2, 2]$ tale che la funzione $g(x) = \log(f(x))$ sia definita su A.

---

5) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x+2) & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} - 1 & \text{se } x > 1 . \end{cases}$$

Studiate brevemente la funzione (segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) e tracciatene un grafico approssimativo nel piano cartesiano xy.
ii) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo (i punti di massimo e/o di minimo) di f su $\mathbb{R}$.
iii) Verificate se $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass. Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di f su $[-1, 3]$.

---

6) Supponete di avere un vuoto di memoria e di non ricordarvi più esattamente il codice personale della vostra tessera Bancomat. Ricordandovi però che le prime due cifre delle cinque cifre che lo compongono sono dispari ed uguali, mentre le altre sono pari (compreso lo 0) e distinti, quante volte dovete digitare il vostro codice per essere sicuri di potere ritirare dei soldi? (buona fortuna!!!!)