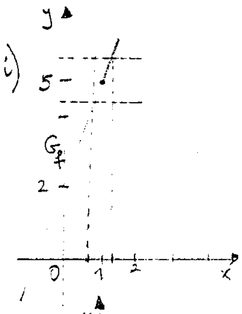
Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (22–26 novembre 2004)

1) i)



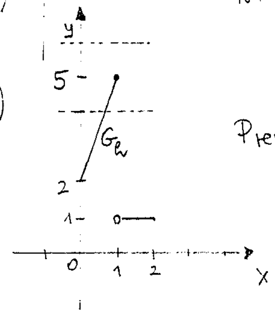
Fissiamo $\varepsilon>0$ qualsiasi. Osserviamo che $\forall x\in\mathbb{R}$ e per $x_0=1$ abbiamo

$$|f(x)-f(x_0)| = |(3x+2)-(3+2)| = |3x-3| = 3|x-1|.$$

Allora se scegliamo un $0<\delta<\frac{\varepsilon}{3}$

si ha che $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(1)| = 3|x-1| < \cancel{3}\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{3}} = \varepsilon$.

ii)



Prendiamo $\varepsilon=1$. Allora $\forall\delta,\ 0<\delta\ \exists x\in\mathbb{R}$ t.c.

$$|x-1|<\delta \quad \text{e} \quad |h(x)-h(1)|\geq 1.$$

Basta prendere $x=1+\frac{\delta}{2}$, e si ha

$$|x-1|<\delta \quad \text{e} \quad |h(x)-h(1)| = |1-5| = 4.$$

iii) $\max_{[0,2]} h = 5 \qquad x=1$ è pt. di massimo.

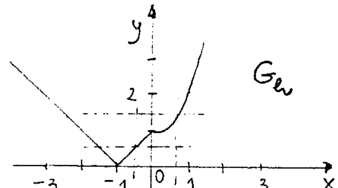
$\min_{[0,2]} h = 1 \qquad$ ogni $1<x\leq 2$ è pt. di minimo. $\square$

2) i) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{2x^2+1}$: è continua in $\mathbb{R}$. Infatti la funzione x^3-2 è continua in tutto $\mathbb{R}$, e anche $2x^2+1$ lo è. Inoltre $2x^2+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Quindi f è continua in $\mathbb{R}$.

ii) $g(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$: è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, essendo il rapporto di funzioni continue e $e^x-1\neq 0$ per ogni $x\neq 0$.

iii) $$h(x)=\begin{cases}|x+1| & \text{se } x\leq 0\\ x^2+1 & \text{se } x>0.\end{cases}$$



: h è continua in tutti i pt. $x<0$, e lo è in tutti i pt. $x>0$.

Inoltre è continua anche in $x=0$. Infatti, fissato $0<\varepsilon<1$,

basta prendere $\delta=\varepsilon$ e si ha che $\forall x\in\mathbb{R}$ con

$$|x-0|<\delta \Rightarrow |h(x)-h(0)|<\varepsilon.$$

Infatti, per $|x-0|<\varepsilon$, si ha $|h(x)-h(0)| = \begin{cases} |x+1-1| = |x| < \varepsilon & \text{se } -\delta<x<0\\ |x^2+1-1| = x^2<\varepsilon & \text{se } 0<x<\delta \end{cases}$

$\square$

3) Poniamo $f(x)=2x^3-3x+\frac{1}{2}$. Allora f è continua su $\mathbb{R}$ e in particolare su ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Consideriamo

$f:[-2,-1]\to\mathbb{R}$: f è continua, $f(-2)=-16+6+\frac{1}{2}<0$, $f(-1)=-2+3+\frac{1}{2}>0$.
Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_1\in\,]-2,-1[$ t.c. $f(x_1)=0$;

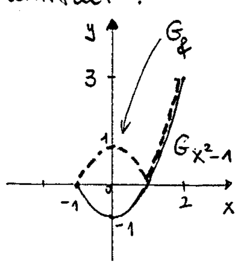
$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$: f è continua, $f(-1)>0$, $f(1)=2-3+\frac{1}{2}<0$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_2\in\,]-1,1[$ t.c. $f(x_2)=0$;

$f:[1,2]\to\mathbb{R}$: f è continua, $f(1)<0$ e $f(2)=16-6+\frac{1}{2}>0$. Quindi esiste $x_3\in\,]1,2[$ t.c. $f(x_3)=0$.

Notiamo che $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ è continua, $f(0)=\frac{1}{2}>0$, mentre $f(1)<0$. Consideriamo $\bar{x}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Abbiamo $f(\bar{x})=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{8}_{4}}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{3}{4}<0$.
Consideriamo $\hat{x}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$; abbiamo $f(\hat{x})=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{64}_{32}}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}<0$.
Per il teorema di esistenza degli zeri esiste una soluzione dell'eq. $2x^3-3x+\frac{1}{2}=0$ nell'intervallo $]0,\frac{1}{4}[$ (e quindi si trova a distanza inferiore a 0.25 da $x=0$). $\square$

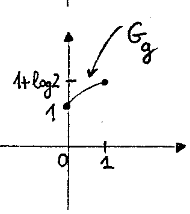
4) i) Le funzioni f, g, h sono continue e i loro domini intervalli chiusi e limitati.

ii)



$\min_{[-1,2]} f = 0$ pt. di minimo $x=-1$, $x=1$,

$\max_{[-1,2]} f = 3$; pt. di massimo $x=2$.



$\min_{[0,1]} g = 1$ pt. di minimo $x=0$,

$\max_{[0,1]} g = 1+\log 2$; pt. di massimo $x=1$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5-x}{3x^3-x^4} = \underline{\underline{-\infty}}$: $\frac{2x^5-x}{3x^3-x^4} = \frac{\overset{\uparrow+\infty}{x^{\cancel{5}}}\left(2-\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^4}}\right)}{\cancel{x^4}\left(\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x}}-1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

ii) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right) = \underline{\underline{+\infty}}$: $\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}\right) = \underset{\downarrow +\infty}{x}\left(\underset{\downarrow 1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \underset{\downarrow 0}{\frac{\sqrt{x}}{x}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2} = \underline{\underline{4}}$: $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} \xrightarrow[x\to2]{} 4$.

$\lim_{x\to2^+}\frac{x-1}{x^2-4} = \underline{\underline{+\infty}}$: $\frac{(x-1)\to 1}{(x^2-4)\to}$ diventa piccolo, con segno positivo $\xrightarrow{x\to2} +\infty$.

iii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{e^x-1} = \underline{\underline{0}}$: $\frac{x^2+1}{e^x-1} = \underset{\downarrow 0}{\frac{x^2}{e^x}}\cdot\frac{\left(1+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1-\underset{\downarrow 0}{1/e^x}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^x-1} = \underline{\underline{-\infty}}$: $\frac{\overset{\nearrow+\infty}{(x^2+1)}}{\underset{\downarrow 0}{e^x}-1}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(1+x^{100})}{x^2+1} = \underline{\underline{0}}$: poichè $\log\left(1+x^{100}\right) \underset{\text{per } x\to+\infty}{\ll} x^m$ per qualunque $m>0$.

$\lim_{x\to1^-}\frac{\log(1-x)}{x} = \underline{\underline{-\infty}}$: infatti $\log(1-x)\longrightarrow-\infty$ per $x\to1^-$ mentre $x\longrightarrow 1$.

$\square$

<u>nota</u>: x^3 è crescente e e^x è crescente, quindi e^{x^3} è crescente; inoltre x è crescente. Ne segue che $h(x)$ è una funzione crescente su $[-1,1]$.

Dunque

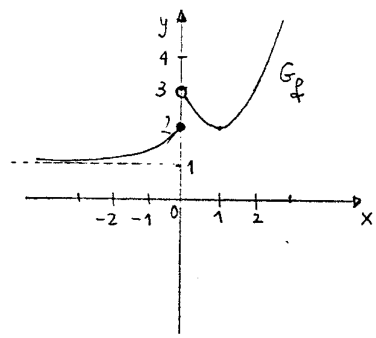
$$\min_{[-1,1]} h = h(-1) = e^{-1} - 1 \qquad \text{pt. di minimo } x=-1,$$

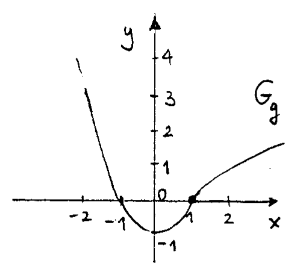
$$\max_{[-1,1]} h = h(1) = e + 1; \qquad \text{pt. di massimo } x = 1.$$

iii) $f([-1,2]) = [0,3]$, $g([0,1]) = [1, 1+\log 2]$, $h([-1,1]) = [-1+\frac{1}{e}, 1+e]$. □

5) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{se } x>0 \\ 2 & \text{se } x=0 \\ e^x+1 & \text{se } x<0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x<1 \\ 2\log x & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

i)





ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ $\quad \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$.

Vale $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

iii) $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. Vale $\lim_{x\to 1^-} g(x) = g(1)$. □

6) i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2x^2}{3x^2-2x} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$: $\frac{x-2x^2}{3x^2-2x} = \frac{\cancel{x^2}(\frac{1}{x}-2)}{\cancel{x^2}(3-\frac{2}{x})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{2}{3}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{x-2x^2}{3x^2-2x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$: $\frac{x-2x^2}{3x^2-2x} = \frac{\cancel{x}(1-2x)}{\cancel{x}(3x-2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3x^2}{x^3+x^2} = \underline{\underline{0}}$: $\frac{2x-3x^2}{x^3+x^2} = \frac{\cancel{x^2}(\frac{2}{x}-3)}{x^{\cancel{3}}(1+\frac{1}{x})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.