

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 1 LUGLIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4, y \geq 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3}y \leq -|x|\}.$$

- ii) Rappresentate graficamente gli insiemi $A \cup B$, $(\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus B$.
 iii) Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta!!)
 a) $A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\} \neq \emptyset$;
 b) $(0, 1) \subset A$;
 c) $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \subset B$;
 d) $(-3, 1) \in A$.

- 2) i) Determinate $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k + e^{3-x}}{\frac{4}{x^3} - 4x^4} = 0; \quad \int_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} x \, dx = \frac{1}{4}.$$

- ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano una funzione

- a) $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e crescente, tale che $f(2) > 0$, $f'(2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$;
 b) $g : [-1, 1] \rightarrow [1, 4]$ continua e biiettiva.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x+1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2x + 4 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x^3 + 4 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f e g .
 - ii) Rappresentate la funzione inversa $f^{-1}(x)$ di $f(x)$ e la funzione reciproca $\frac{1}{g(x)}$ di $g(x)$.
 - iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di f e di g su $]-1, 1]$.
 - iv) Determinate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Esiste $f'(0)$?
 - v) Determinate $g(\mathbb{R})$. g è una funzione iniettiva e/o suriettiva?
-

4) Provate che l'equazione $\frac{1}{(x+1)^2} = 2x + \frac{1}{2}$ ha un'unica soluzione $x_0 \in]0, 1[$. Usando il metodo della bisezione determinate un intervallo $]a, b[\subset]0, 1[$ tale che $b - a \leq \frac{1}{8}$ ed $x_0 \in]a, b[$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (1-x)e^{-x^2+x}.$$

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico della f nel punto di intersezione del grafico di f con l'asse x .
 - iii) Provate che il grafico di f sta sopra la retta tangente r nell'intervallo $[0, 1]$.
 - iv) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento il grafico di f e la retta r .
-

6) Scrivete 'in matematiche' la negazione della seguente proposizione: "Ogni prova scritta di Analisi Matematica contiene almeno un esercizio di Calcolo Combinatorio o un esercizio sulle disequazioni logaritmiche".

COGNOME _____
 NOME _____
 MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 1 LUGLIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4, y < 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3}y \geq |x|\}.$$

- ii) Rappresentate graficamente gli insiemi $A \cup B$, $(\mathbb{R}^2 \setminus A) \setminus B$.
 iii) Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta!!)
 a) $A \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\} \neq \emptyset$;
 b) $(0, -1) \subset A$;
 c) $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \subset B$;
 d) $(-3, -1) \in A$.

- 2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x+1} & \text{se } x \leq -1 \\ x+3 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x^4 + 3 & \text{se } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq 0 \\ -2x+4 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f e g .
 ii) Rappresentate la funzione inversa $f^{-1}(x)$ di $f(x)$ e la funzione reciproca $\frac{1}{g(x)}$ di $g(x)$.
 iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di f e di g su $]-1, 1]$.
 iv) Determinate $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ e $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. Esiste $f'(0)$?
 v) Determinate $g(\mathbb{R})$. g è una funzione iniettiva e/o suriettiva?

- 3) Provate che l'equazione $\frac{1}{(x+1)^2} = 2x + \frac{1}{2}$ ha un'unica soluzione $x_0 \in]0, 1[$. Usando il metodo della bisezione determinate un intervallo $]a, b[\subset]0, 1[$ tale che $b - a \leq \frac{1}{8}$ ed $x_0 \in]a, b[$.
-

- 4) i) Determinate $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^{3-x}}{\frac{4}{x^3} - 4x^k} = 0; \quad \int_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} x \, dx = \frac{1}{8}.$$

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano una funzione

- a) $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e crescente, tale che $f(2) > 0$, $f'(2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$;
b) $g : [-1, 1] \rightarrow [1, 4]$ continua e biiettiva.
-

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)e^{-x^2+x}.$$

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico della f nel punto di intersezione del grafico di f con l'asse x .
iii) Provate che il grafico di f sta sotto la retta tangente r nell'intervallo $[0, 1]$.
iv) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento il grafico di f e la retta r .
-

- 6) Scrivete 'in matematiche' la negazione della seguente proposizione: "Ogni prova scritta di Analisi Matematica contiene almeno un esercizio di Calcolo Combinatorio e un esercizio sulle disequazioni logaritmiche".
-