

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 9 FEBBRAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Sia C il centro dell'ellisse E di equazione $x^2 + 2x + 4(y^2 - 4y + 4) = 3$ e V il vertice della parabola di equazione $y - x^2 + 2x + 2 = 0$.
- Determinate l'equazione della retta r passante per C e V .
 - Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C .
 - Rappresentate graficamente, nello stesso sistema di riferimento, l'ellisse, la parabola e le rette r ed r' .
 - Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):
 - $\forall(x, y) \in E, y \geq 1$;
 - $\forall(x, y) \in E, x < 0$;
 - $\exists(x, y) \in E : x = 1$;
 - $(-1, 1) \in E$.

- 2) Sia $f : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -3 \leq x < -2 \\ |x^2 - 1| & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

- Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione f . Rappresentate sulla retta reale il segno di f' .
- Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di f su $[-1, 2]$.
- Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni $x \mapsto -f(x) + 1$, e $x \mapsto f(x + 1)$.
- Calcolate $\int_1^5 f(x) dx$.

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$2^{|x-1|} \cdot 2^x < 4 ; \quad \log_2(3 - x^2) \leq 1 ; \quad \frac{1}{|x-1|-2} > 0 .$$

ii) Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Calcolate $\sum_{n=1}^8 \int_n^{n+1} f(x) dx$.

4) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false? (motivate le risposte!!)

- i) $f(x) \leq f(0)$ per ogni $x \in [0, 1]$;
 - ii) $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < 1$;
 - iii) esiste il massimo e il minimo di f su $[0, 1]$;
 - iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -1$.
-

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 5x^4 - 4x^5$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(1, 1)$.
 - iii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 - iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.
-

6) Determinate $n \in \mathbb{N}$ tale che $C_{n,2} = 10$.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 9 FEBBRAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Sia C il centro dell'ellisse E di equazione $x^2 - 2x + 4(y^2 + 4y + 4) = 3$ e V il vertice della parabola di equazione $y + x^2 + 2x - 2 = 0$.
- Determinate l'equazione della retta r passante per C e V .
 - Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C .
 - Rappresentate graficamente, nello stesso sistema di riferimento, l'ellisse, la parabola e le rette r ed r' .
 - Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):
 - $\forall(x, y) \in E, y \leq -1$;
 - $\forall(x, y) \in E, x > 0$;
 - $\exists(x, y) \in E : y = -2$;
 - $(1, -2) \in E$.

- 2) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$2^{|x-1|} \cdot 2^x \geq 8; \quad \log_3(4 - x^2) < 1; \quad \frac{1}{|x-1|-3} > 0.$$

- ii) Sia $f(x) = \frac{1}{x^3}$. Calcolate $\sum_{n=1}^8 \int_n^{n+1} f(x) dx$.

- 3) Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false? (motivate le risposte!!)
- $f(x) \leq f(0)$ per ogni $x \in [0, 1]$;
 - $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < 1$;
 - esiste il massimo e il minimo di f su $[0, 1]$;
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -1$.
-

- 4) Sia $f : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ |x^2 - 1| & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{se } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

- Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione f . Rappresentate sulla retta reale il segno di f' .
 - Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di f su $[-3, 1]$.
 - Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni $x \mapsto -f(x) + 1$, e $x \mapsto f(x-1)$.
 - Calcolate $\int_2^5 f(x) dx$.
-

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -5x^4 + 4x^5$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- Determine l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(1, -1)$.
 - Determine, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 - Determine l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta di equazione $y = -x + 1$ e dalle rette di equazione $x = 0$ e $x = 1$.
-

- 6) Determinate $n \in \mathbb{N}$ tale che $D_{n,2} = 12$.
-