

Esame scritto (A)

(A)

1) i) Sia $A(x,y) =$ "Nella sessione d'esami x lo studente Mario Rossi supera l'esame y con un voto superiore a $27/30$ ". Allora la proposizione data si esprime in matematica come segue:

$$\text{"}\forall x, \exists y : A(x,y)\text{"} \quad (\text{non} [\forall x, \exists y : A(x,y)] \Leftrightarrow \text{"}\exists x : \forall y, \text{non } A(x,y)\text{"}).$$

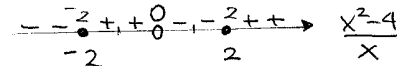
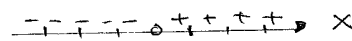
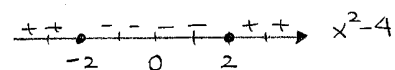
La negazione della proposizione data si esprime in italiano corrente come segue: "C'è almeno una sessione d'esami in cui lo studente Mario Rossi ogni esame non lo supera con un voto superiore a $27/30$ ".

$$\text{ii) } A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 8}{x} \geq -x \right\} = \underline{[-2, 0[\cup [2, +\infty[}$$

$$\frac{x^2-8}{x} + x \geq 0 \iff$$

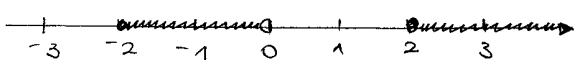
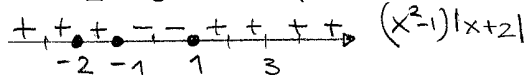
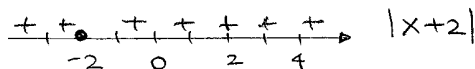
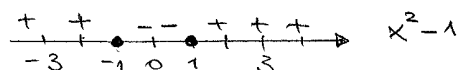
$$\frac{2x^2-8}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)|x + 2| \leq 0\}$$

$$= \{-2\} \cup \underline{\underline{[-1, 1]}}$$


$$141067 = A$$

$$\text{value} = 3$$

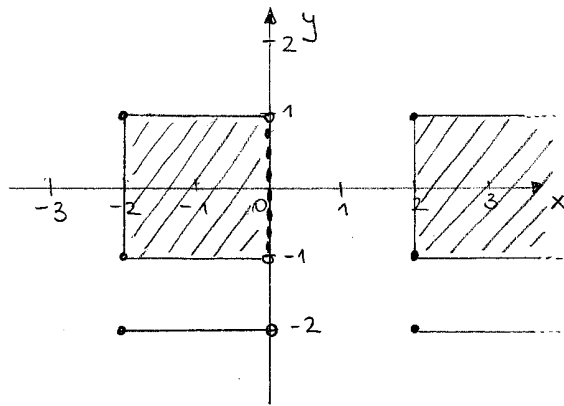
iii) $A \cup B = [-2, 1] \cup [2, +\infty[$;

$$A \cap B = \{-2\} \cup [-1, 0[;$$

$$A \setminus B = \underline{\underline{]-2, -1[\cup [2, +\infty[}}$$

Nessuno di questi insiemi è un intervallo di $\mathbb{R}$.

iv)



$A \times B$

$$2) i) \quad 2^{-3x^2} \cdot 4^{-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^{-3x^2} \cdot 2^{-2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2^{-3x^2-2x} \geq 2^1$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 \leq 0$$

2^x è strett. crescente

Abbiamo $3x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$ e quindi

$3x^2 + 2x + 1 = 0$ non ha soluzioni. Poiché $3x^2 + 2x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

si ha che l'insieme delle soluzioni della diseq. data è

$S = \emptyset$

□

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2|} \cdot 3^{-x} < 1 \Leftrightarrow 3^{-|x^2-2|} \cdot 3^{-x} < 1 \Leftrightarrow 3^{-|x^2-2|-x} < 3^0$$

$$\Leftrightarrow -|x^2-2|-x < 0 \Leftrightarrow |x^2-2|+x > 0$$

3^x è strett. crescente

Notiamo che $|x^2-2|+x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 \geq 0 \\ x^2-2+x > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x^2-2 < 0 \\ -x^2+2+x > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 2 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x^2 < 2 \\ x^2-x-2 < 0 \end{cases}$$

Poiché $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$
 $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$

i sistemi sopra diventano $\begin{cases} x^2 \geq 2 \\ x < -2 \text{ o } x > 1 \end{cases}$ opp. $\begin{cases} x^2 < 2 \\ -1 < x < 2 \end{cases}$,

ossia $\begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \text{ o } x \geq \sqrt{2} \\ x < -2 \text{ o } x > 1 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$;

ne segue $\begin{cases} S_1 =]-\infty, -2[\cup [\sqrt{2}, +\infty[\\ S_2 =]-1, \sqrt{2}[\end{cases}$

e quindi $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

□

$$3x^2 - |x-1| - x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x^2 - (x-1) - x \leq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x-1 < 0 \\ 3x^2 - (-x+1) - x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 2x + 1 \leq 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 1 \\ 3x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \emptyset \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x < 1 \\ x^2 \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

□

$$\log(x+1) + \log(2x-1) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ \log(x+1)(2x-1) \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \\ (x+1)(2x-1) \geq e \end{cases} \quad (\text{nota: } \log e = 1, \text{ e } \log x \text{ è una funzione strett. crescente})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x - 1 - e \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x - (1+e) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{oss. che } 2x^2 + x - (1+e) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8(1+e)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+8e}}{4}$$

$$\text{e quindi } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x - (1+e) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{-1-\sqrt{9+8e}}{4} \text{ o } x \geq \frac{-1+\sqrt{9+8e}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Ovviamente } \frac{-1+\sqrt{9+8e}}{4} > \frac{-1+\sqrt{9}}{4} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \text{ e quindi}$$

$$S = \left[\frac{-1+\sqrt{9+8e}}{4}, +\infty \right[.$$

Commento: Svolgete lo stesso esercizio con $\log_2 x$ invece che con $\log x$;

allora $1 = \log_2 2$ e la diseq. da risolvere diventa equiv.

al numero

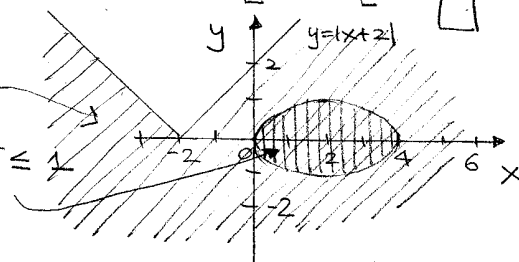
$$\begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{2} \\ 2x^2 + x - 3 \geq 0 \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$$

e quindi, in questo caso si ha banalmente $S = [1, +\infty[.$

□

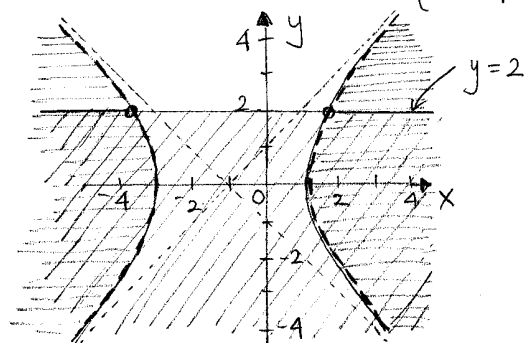
$$\text{ii) a) } \begin{cases} y \leq |x+2| \\ x^2 - 4x + 4y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq |x+2| \\ \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$



$$S = \text{shaded region} = \text{shaded region}$$

$$b) \begin{cases} y \leq 2 \\ (x+1)^2 - y^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 2 \\ \left(\frac{x+1}{4}\right)^2 - \frac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$$

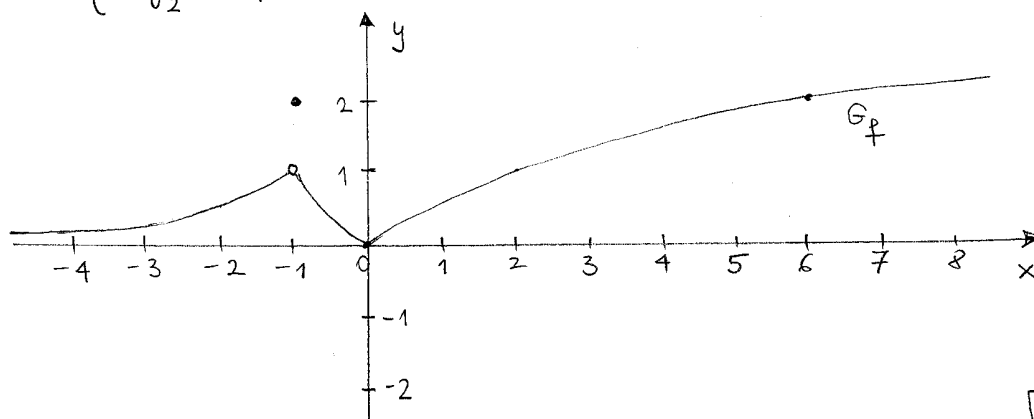


$$S = \text{shaded region}$$

$$3) f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \\ |\log_2(x+2) - 1| & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

ii)



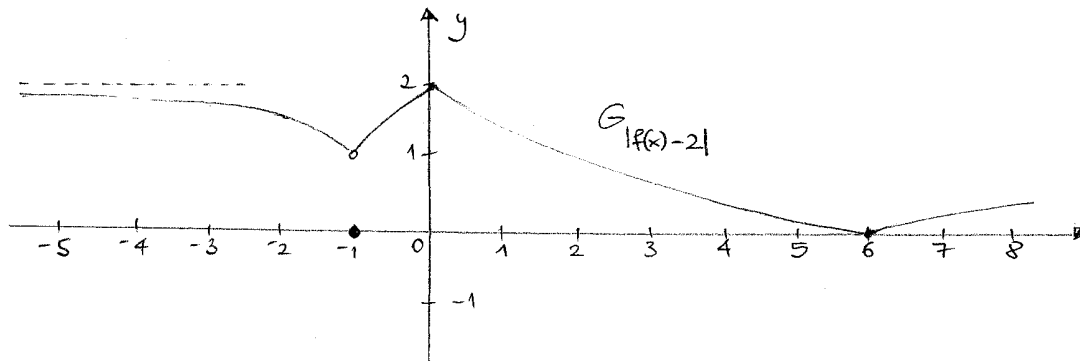
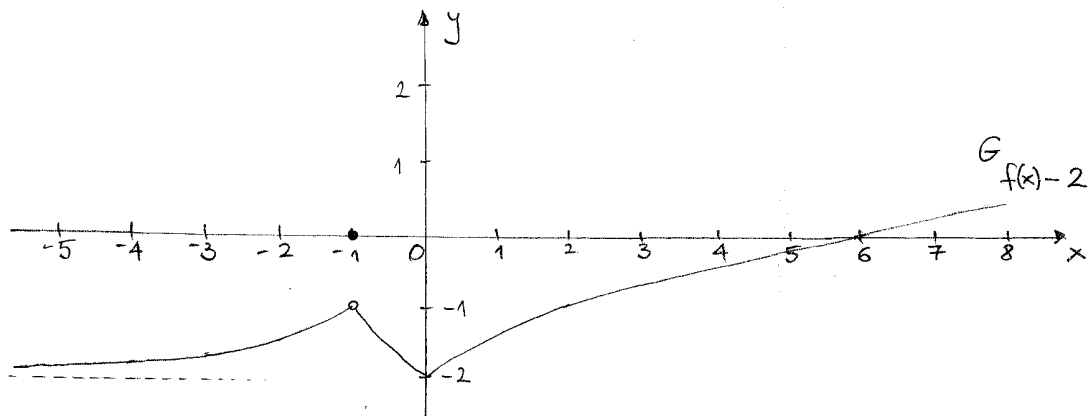
ii) osserviamo che $f(-1) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ e quindi $x = -1$ è un pt. di discontinuità per la f nell'intervallo $[-1, 2]$; non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass.

$$\min_{[-1, 2]} f = f(0) = 0 \quad x=0 \text{ pt. di minimo di } f \text{ su } [-1, 2];$$

$$\max_{[-1, 2]} f = f(-1) = 2 \quad x=-1 \text{ pt. di massimo di } f \text{ su } [-1, 2].$$

iii) $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$; poiché abbiamo considerato $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ e $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ si ha che f è suriettiva.

iv) $x \mapsto |f(x) - 2|$



4) Vedi Terza Prova Intermedia (A) Es. 4

5) " Es. 5

6) $P_{20} = 20!$